Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2011**
Dr. S. Krömer
Dr. A. Stylianou

Funktionalanalysis
5. Übung

Abgabe: Montag, 09.05.2011, bis 17:00 Uhr
(in den rechten oberen Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Es sei H ein Hilbertraum, $S \subset H$ eine dichte Teilmenge und $A : D(A) \to H$ linear mit dichtem Definitionsbereich $D(A) \subset H$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $u, v \in H$ gilt: $(\varphi, u) = (\varphi, v)$ für alle $\varphi \in S \implies u = v$.

(b) Existiert zu $v \in H$ ein $w \in H$ mit $(Au, v) = (u, w)$ für alle $u \in D(A)$, so ist $v \in D(A^*)$ und $w = A^*v$.

(c) Ist $D(A^*)$ dicht in H, so gilt $D(A) \subset D(A^{**})$ und $A^{**}u = Au$ für alle $u \in D(A)$, wobei $A^{**} := (A^*)^*$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Es sei (a, b) ein beschränktes Intervall, $H := L^2(a, b)$ (reeller Hilbertraum) und $A : D(A) \to H$, $u \mapsto Au := u'$, mit $D(A) := C^1([a, b]) \cap \{u \mid u(a) = 0\}$ (was eine dichte Teilmenge von H ist). Zeigen Sie:

(a) Ist $v \in C^1([a, b])$ mit $v(b) = 0$, so ist $v \in D(A^*)$ und $A^*v = -v'$.

(b) Ist $v \in C^1([a, b]) \cap D(A^*)$, so gilt $A^*v = -v'$ und $v(b) = 0$.
Hinweis: Verwenden Sie insbesondere Aufgabe 1(a), z.B. mit $S = C_0^\infty(a, b)$.

(c) Ist $v \in D(A^*)$, so ist v auf (a, b) schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung $v' \in H$, und $A^*v = -v'$.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Es sei H ein Hilbertraum, $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in H und $u \in H$. Zeigen Sie:

(a) (*Besselsche Ungleichung*) Für alle $m \leq n$ gilt

$$\left\|\sum_{j=m}^n (u, \varphi_j)\, \varphi_j\right\|^2 = \sum_{j=m}^n |\,(u, \varphi_j)\,|^2 \leq \|u\|^2.$$

Hinweis: $\left\|u - \sum_{j=m}^n (u, \varphi_j)\, \varphi_j\right\|^2 + \left\|\sum_{j=m}^n (u, \varphi_j)\, \varphi_j\right\|^2 = \|u\|^2$ (Wieso?).

(b) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $v_n := \sum_{j=1}^n (u, \varphi_j)\, \varphi_j$, ist eine Cauchy-Folge in H.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes offenes Intervall und $u \in W^{1,2}(a,b)$. Ferner sei $\bar{u}$ der stetige Repräsentant von u vom letzten Blatt. Zeigen Sie:

(a) $\bar{u}(y) - \bar{u}(x) = \displaystyle\int_x^y u'(t)\,dt$, für alle $a < x < y < b$.
Hinweis: Dies gilt sicherlich für $u_n \in C^1(a,b) \cap W^{1,2}(a,b)$ anstelle von $\bar{u}$ bzw. u, und es kann angenommen werden, dass $u_n \to u$ in $W^{1,2}(a,b)$ und $u_n \to \bar{u}$ in $C_b(a,b)$. Wieso bleibt die Gleichung im Limes $n \to \infty$ erhalten?

(b) $|\bar{u}(y) - \bar{u}(x)| \leq (y-x)^{\frac{1}{2}} \left(\displaystyle\int_x^y (u'(t))^2\,dt \right)^{\frac{1}{2}}$, für alle $a < x < y < b$.

(c) $\bar{u}(a) := \lim_{x \searrow a} \bar{u}(x)$ und $\bar{u}(b) := \lim_{x \nearrow a} \bar{u}(x)$ existieren, womit $\bar{u}$ eindeutig zu einer stetigen Funktion auf $[a,b]$ fortgesetzt werden kann.

Bemerkung: Zusammen mit den Ergebnissen der früheren Blätter folgt daraus, dass $W^{1,2}(a,b)$ stetig in $C([a,b])$ eingebettet ist.

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1111SS/FA.html