Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2011**
Dr. S. Krömer
Dr. A. Stylianou

Funktionalanalysis

6. Übung

Abgabe: Montag, 16.05.2011, bis 17:00 Uhr
(in den rechten oberen Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Es sei H ein Hilbertraum, $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in H und $u \in H$. Zeigen Sie:

a) $\{\varphi_j\}$ ist ein vollständiges Orthonormalsystem in H genau dann, wenn

$$(w, \varphi_j) = 0 \text{ für alle } j \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad w = 0$$

für beliebiges $w \in H$ gilt.

b) Sei $v_n := \sum_{j=1}^{n} (u, \varphi_j)$ und $v := \lim_{n\to\infty} v_n = \sum_{j=1}^{\infty} (u, \varphi_j)\, \varphi_j \in H$. Dann gilt $(v_n, \varphi_j) = (u, \varphi_j)$ für $j \leq n$, und $(v, \varphi_j) = (u, \varphi_j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

c) Ist $\{\varphi_j\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H, so gilt $v = u$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Es sei (u_n) eine Folge in einem Hilbertraum H, und $u, v \in H$. Zeigen Sie:

a) Der schwache Limes ist eindeutig, d.h.
$u_n \rightharpoonup u$ und $u_n \rightharpoonup v \quad \Longrightarrow \quad u = v.$

b) $u_n \rightharpoonup u$ und $\|u_n\| \to \|u\| \quad \Longrightarrow \quad u_n \to u.$

c) $u_n \rightharpoonup u \quad \Longrightarrow \quad \|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|.$
Untersuchen Sie ausserdem, wann hier "=" anstelle von "$\leq$" gilt.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Es seien (u_n) und (v_n) zwei Folgen in einem unendlichdimensionalen Hilbertraum H mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $u_n \rightharpoonup u$ und $v_n \rightharpoonup v \quad \Longrightarrow \quad (u_n, v_n) \to (u, v).$

b) $u_n \to u$ und $v_n \to v \quad \Longrightarrow \quad (u_n, v_n) \to (u, v).$

c) $u_n \rightharpoonup u$ und $v_n \to v \quad \Longrightarrow \quad (u_n, v_n) \to (u, v).$

d) $u_n \rightharpoonup u$, $v_n \rightharpoonup v$ und $(u_n, v_n) \to (u, v) \quad \Longrightarrow \quad u_n \to u$ oder $v_n \to v.$

Hinweis: Gegenbeispiele konstruieren Sie am besten mit einem Orthonormalsystem in H.
(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Beweisen Sie für eine Folge (u_k) in $H^{1,2}(\Omega)$ die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) (u_k) konvergiert schwach in $H^{1,2}(\Omega)$

b) (u_k), $\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_1}\right), \ldots, \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_n}\right)$ konvergieren schwach in $L^2(\Omega)$

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1111SS/FA.html