Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer
Dr. A. Stylianou

SS 2011

Funktionalanalysis
7. Übung

Abgabe: Montag, 23.05.2011, bis 17:00 Uhr
(in den rechten oberen Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:

a) Es seien H_1, H_2, H_3 Hilberträume und $A : H_1 \to H_2$, $B : H_2 \to H_3$ beschränkte lineare Operatoren. Zeigen Sie, dass BA kompakt ist, falls A oder B kompakt ist.

b) Sei $K : H \to H$ linearer kompakter Operator auf einem unendlichdimensionalen Hilbertraum H. Zeigen Sie, dass der inverse Operator K^{-1}, sofern er existiert, nicht beschränkt sein kann.

c) Zeigen Sie, dass ein beschränkter linearer Operator $A : H_1 \to H_2$ kompakt ist, falls der Bildraum $A(H_1)$ endlichdimensional ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei (α_k) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\alpha_k \to 0$, und $A, A_n : l^2 \to l^2$ $(n \in \mathbb{N})$ seien gegeben durch

$$(Ax)_k := \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 1, \\ \alpha_k x_{k-1} & \text{falls } k \geq 2, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad (A_n x)_k := \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 1 \text{ oder } k > n, \\ \alpha_k x_{k-1} & \text{falls } 2 \leq k \leq n, \end{cases}$$

für $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2$. Zeigen Sie:

a) $A_n \to A$ in der Operatornorm.

b) A ist kompakt.

c) Gilt $\alpha_k \neq 0$ für alle k, so hat A keine Eigenwerte.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei Q ein Operator auf $L^2(a, b)$ gegeben durch

$$(Qf)(x) = xf(x) \quad .$$

a) Zeigen Sie, daß Q ein beschränkter Operator auf $L^2(a, b)$ ist, und berechnen Sie seine Operatornorm.

b) Ist Q selbstadjungiert?

c) Ist Q kompakt?

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei H ein reeller Hilbertraum und $T : H \to H$ linear, kompakt und selbstadjungiert. Zeigen Sie die folgenden Aussagen zur Operatornorm $\|T\|$ von T:

a) Für alle Eigenwerte λ von T gilt $|\lambda| \leq \|T\|$.

b) Es existiert eine Eigenwert λ von T mit $|\lambda| = \|T\|$.
Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass die Eigenvektoren von T ein vollständiges ONS in H bilden.

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1111SS/FA.html