**Prof. Dr. B. Kawohl**
**Dr. S. Krömer**
**Dr. A. Stylianou**

**SS 2011**

# Funktionalanalysis

## 8. Übung

**Abgabe: Montag, 30.05.2011, bis 17:00 Uhr**
(in den rechten oberen Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

**Aufgabe 1:**
Es sei $(u^{(n)}) \subset \ell^2$ eine beschränkte Folge, $u^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}, \ldots)$. Zeigen Sie:

a) Ist $(u^{(n)})$ konvergent in $\ell^2$, dann gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=M}^{\infty} (u_m^{(n)})^2 \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1}$$

**Hinweis**: Für große $n$ und $u := \lim u^{(n)}$ hilft die Abschätzung

$$\Big(\sum_{m=M}^{\infty} (u_m^{(n)})^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \|u^{(n)} - u\|_{\ell^2} + \Big(\sum_{m=M}^{\infty} (u_m)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

b) Ist (1) erfüllt und konvergiert $u^{(n)} \rightharpoonup u$ schwach in $\ell^2$, so folgt $u^{(n)} \to u$ stark in $\ell^2$.

**(5 Punkte)**

**Aufgabe 2:**
Sei $K : L^2(0,\pi) \to H_0^{1,2}(0,\pi)$ der injektive, lineare, beschränkte Operator, der $f \in L^2(0,\pi)$ die eindeutig bestimmte Lösung $Kf := u$ von

$$u \in H_0^{1,2}(0,\pi), \quad \int_0^\pi (u'\varphi' + u\varphi)\,dt = \int_0^\pi f\varphi\,dt, \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^{1,2}(0,\pi), \tag{2}$$

zuordnet. Tatsächlich gilt sogar $u = Kf \in H^{2,2}(0,\pi) \cap H_0^{1,2}(0,\pi)$, und (2) lässt sich äquivalent umformulieren zu

$$-u'' + u = f \quad \text{f.ü. in } (0,\pi), \quad u(0) = u(\pi) = 0, \tag{3}$$

was Sie ohne Beweis verwenden dürfen. Zeigen Sie:

a) Ist $f \in L^2(0,\pi)$ ein Eigenvektor von $K$ zum Eigenwert $\lambda > 0$, so ist $u := Kf$ Lösung von

$$-u'' + u = \frac{1}{\lambda} u \quad \text{f.ü. in } (0,\pi), \quad u(0) = u(\pi) = 0, \tag{4}$$

und $u \in C^2([0,\pi])$ (genauer gesagt ein Repräsentant von $u$).

b) Bestimmen Sie explizit alle Lösungen $(u,\lambda) \in C^2([0,\pi]) \times (0,\infty)$ von (4), und damit alle Eigenwerte und Eigenfunktionen von $K$.

**(5 Punkte)**

**Aufgabe 3:**
Sei $A : \ell^2 \to \ell^2$, $(\xi_i) \mapsto (\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \frac{1}{3}\xi_3, \frac{1}{4}\xi_4, \ldots)$. Zeigen Sie, dass $A$ kompakt und selbstadjungiert ist, und bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume. Begründen Sie auch, warum es keine weiteren Eigenwerte geben kann. Haben die von Ihnen gefundenen Eigenwerte einen Häufungspunkt?

**(5 Punkte)**

**Aufgabe 4:**

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge, $p, q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (wir definieren $\frac{1}{\infty} = 0$), $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $fg \in L^1(\Omega)$ und

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \quad \text{(Höldersche Ungleichung).}$$

**Hinweis:** Beweisen Sie zuerst, dass

$$ab \leq \frac{1}{s}a^s + \frac{1}{t}b^t \quad \forall a, b > 0, \quad \forall s, t \in (1, \infty), \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1 \text{ gilt.}$$

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge, $p \in [1, \infty]$, $f, g \in L^p(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $f + g \in L^p(\Omega)$ und

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \quad \text{(Minkowskische Ungleichung).}$$

**Hinweis:** $\int_\Omega |f + g|^p dx \leq \int_\Omega |f + g|^{p-1}|f|dx + \int_\Omega |f + g|^{p-1}|g|dx$.

**Bemerkung:** Die Ungleichungen gelten auch auf $\ell^p$-Räumen. Betrachten Sie die Abbildung:

$$\begin{aligned} \ell^p &\longrightarrow L^p(\Omega) \quad , \quad \Omega = (0, \infty) \\ \{\xi_i\} &\longmapsto f(x) = \xi_i \quad \text{für } x \in (i - 1, i) \quad . \end{aligned}$$

**(5 Punkte)**

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

**http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1111SS/FA.html**