Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2011**
Dr. S. Krömer
Dr. A. Stylianou

Funktionalanalysis

9. Übung

Abgabe: Montag, 06.06.2011, bis 17:00 Uhr
(in den rechten oberen Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass für eine beliebige Metrik $d : V \times V \to \mathbb{R}$ die sogenannte Parallelogrammungleichung gilt:

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) \qquad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V \quad .$$

b) Beweisen Sie, dass die durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

definierte Abbildung $d : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Metrik ist (diese Metrik wird als diskrete Metrik bezeichnet). Welche Gestalt haben die Kugeln $B_r(x) := \{y \in V \mid d(x, y) < r\}$ in Abhängigkeit vom Radius r? Zeigen Sie, dass eine Folge genau dann bezüglich der diskreten Metrik konvergent ist, wenn sie bis auf endlich viele Folgenglieder konstant ist. Ist V versehen mit der diskreten Metrik vollständig?

c) Sei $d : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Metrik und $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften:

(i) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ für $x > 0$
(ii) φ monoton wachsend
(iii) φ' monoton fallend

Zeigen Sie, dass dann $\tilde{d}(x, y) := \varphi(d(x, y))$ ebenfalls eine Metrik ist.
Bemerkung: $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$ ist ein Beispiel für solch eine Funktion.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei d eine translationsinvariante Metrik auf V, d.h.

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \qquad \forall x, y, z \in V \quad .$$

a) Zeigen Sie

$$d(nx, 0) \leq n\ d(x, 0)$$

für alle $x \in V$ und $n \in \mathbb{N}$.

b) Sei $\{x_n\}$ eine Folge in V mit $x_n \to 0$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass es dann eine Folge positiver Zahlen $\{\gamma_n\}$ gibt, so daß gilt: $\gamma_n \to \infty$ und $\gamma_n x_n \to 0$.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Es sei V ein reller (oder komplexer) Vektorraum. Eine Abbildung $p : V \to \mathbb{R}$ heisst *Seminorm* auf V, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) gilt, dass

$$p(x) \geq 0, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x).$$

Eine Familie von Seminormen p_n, $n \in \mathbb{N}$, heisst *trennend*, falls für jedes $x \in V$

$$p_n(x) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

Zeigen Sie, dass für jede trennende Familie von Seminormen p_n, $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}$$

eine translationsinvariante Metrik auf V ist.
Zusatz (ohne Bewertung): Überlegen Sie sich, wie man die p_n definieren kann, um mit Hilfe der obigen Konstruktion $V := C(\Omega)$ (mit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen) zu einem vollständigen metrischen Vektorraum zu machen.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beliebiges Gebiet. Beweisen Sie, dass für $\alpha \in (0,1)$ der Raum $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ der hölderstetigen Funktionen vollständig ist.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $C(\overline{\Omega})$ vollständig ist.

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1111SS/FA.html