Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer

SS 2011

Funktionalanalysis

10. Übung

Abgabe: Montag, 20.06.2011, bis 17:00 Uhr
(in den rechten oberen Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Zeigen Sie für $p, q \in [1, \infty]$ mit $p < q$ die Einbettung $\ell^p \subset \ell^q$. Ist diese Einbettung stetig? Gilt analog auch $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$?

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei c_0 der Raum der gegen Null konvergenten Folgen in $\mathbb{R}$, versehen mit der Supremumsnorm. Zeigen Sie:

a) $(\ell^1)^* = \ell^\infty$,

b) $(c_0)^* = \ell^1$.

Dabei ist die Gleichheit $X = Y$ in a) und b) im Sinne von isometrischer Isomorphie zu verstehen, also dass es eine bijektive lineare Abbildung $I : Y \to X$ gibt, so dass $\|Iy\|_X = \|y\|_Y$ für jedes $y \in Y$ gilt.
Hinweis zu a): Offenbar ist $Iv \in (\ell^1)^*$ für $v \in \ell^\infty$, wenn $(Iv)(u) := \sum_{k=1}^\infty v_i u_i$. Umgekehrt kann man zu $f \in (\ell_1)^*$ die Folge $v_k := f(e^{(k)})$ definieren (mit $e^{(k)} := (\delta_{kj})_j \in \ell^1$). Wieso ist $v = (v_k)_k \in \ell^\infty$?

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei (x_n) eine Folge im Banachraum B und (f_n) eine Folge in B^*, sowie $x \in B$, $f \in B^*$. Zeigen Sie anhand von Gegenbeispielen, daß die folgenden Aussagen im allgemeinen nicht gelten:

a) $(x_n \rightharpoonup x$ und $f_n \rightharpoonup f) \Longrightarrow f_n(x_n) \to f(x)$,

b) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \Longrightarrow f_n \rightharpoonup f$.

Hinweis zu b): Wählen Sie B so, dass $B^{**} \neq B$ gilt, wie z.B. in Aufgabe 2.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ und $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Für beliebiges $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ definieren wir

$$\eta \star \varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \quad (\eta \star \varphi)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \eta(y)\varphi(x+y)\,dy.$$

Zeigen Sie:

a) Gilt $\eta \in C_0^\infty(B_\alpha(0))$ und $\varphi \in C_0^\infty(B_\beta(0))$ für zwei Zahlen $\alpha, \beta > 0$, so folgt $\eta \star \varphi \in C_0^\infty(B_{\alpha+\beta}(0))$.

b) $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, wobei $T\varphi := S[\eta \star \varphi]$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1111SS/FA.html