Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer **SS 2011**

Funktionalanalysis

11. Übung

Abgabe: Montag, 27.06.2011, bis 17:00 Uhr
(in den rechten oberen Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Es sei X ein unendlichdimensionaler Banachraum. Zeigen Sie, dass X keine abzählbare Basis hat.
Hier ist "Basis" im Sinne der linearen Algebra gemeint, also eine Menge $B \subset X$, so dass je endlich viele verschiedene Elemente von B linear unabhängig sind, und jedes Element von X sich als endliche Linearkombination von Elementen aus B darstellen lässt.
Hinweis: Versuchen Sie einen indirekten Beweis, der den Baireschen Kategoriensatz ausnützt.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Es seien X, Y Banachräume, $D(T) \subset X$ ein (nicht notwendig abgeschlossener) Unterraum und $T : D(T) \to Y$ linear. Man sagt, dass T *abgeschlossen* ist, wenn der Graph von T abgeschlossen ist, also $G(T) := \{(x, Tx) \mid x \in D(T)\} \subset X \times Y$ abgeschlossen. (Das ist nicht analog zum Begriff der offenen Abbildung!) Für $x \in D(T)$ definieren wir die Graphennorm $\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$. Zeigen Sie:

a) Ist $Z \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum, so ist Z vollständig bezüglich $\|\cdot\|_X$.

b) $X \times Y$ bildet einen Banachraum mit $\|(x, y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$.

c) Ist T abgeschlossen, so ist $D(T)$ mit $\|\cdot\|_T$ ein Banachraum.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Es seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear und stetig. Ferner sei $\operatorname{codim}_Y T(X) < \infty$, d.h. es existiert ein endlichdimensionaler (und damit abgeschlossener) Unterraum $M \subset Y$ mit $Y = T(X) \oplus M$. Zeigen Sie, dass dann $Y \setminus T(X)$ offen und damit $T(X)$ in Y abgeschlossen ist.
Hinweis: Verwenden Sie die surjektive Hilfsabbildung $S : X \times M \to Y$, $(x, m) \mapsto Tx + m$.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei X eine Banachraum. Für $x \in X$ definieren wir $Jx \in X^{**}$ durch $(Jx)(f) = f(x)$, $f \in X^*$. Zeigen Sie:

a) $J : X \to X^{**}$ ist linear und beschränkt.

b) J ist eine Isometrie, d.h. $\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ für alle $x \in X$. Insbesondere ist J injektiv. **Hinweis**: Für "$\geq$" müssen Sie mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach zu gegebenem x ein geeignetes $f \in X^*$ definieren.

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1111SS/FA.html