Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer **SS 2011**

Funktionalanalysis

12. Übung

Abgabe: Montag, 04.07.2011, bis 17:00 Uhr
(in den rechten oberen Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum, $\mathcal{L}(X,Y)$ die Menge aller linearen beschränkten Abbildungen von X nach Y. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(X,Y)$ mit der Operatornorm $|||\cdot|||$ ein Banachraum ist.
Bemerkung: Insbesondere gilt: X normierter Raum $\Rightarrow$ X^* Banachraum.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Es seien X und Y normierte Vektorräume, $X \neq \{0\}$. Zeigen Sie, daß aus der Vollständigkeit von $(\mathcal{L}(X,Y), |||\cdot|||)$ die Vollständigkeit von Y folgt.
Hinweis: Für beliebiges, fest gewähltes $x_0 \in X \setminus \{0\}$ existiert nach dem Satz von Hahn-Banach ein Funktional $f \in X^*$ mit $\|f\|_{X^*} = 1$ und $f(x_0) = 1$. Definieren Sie mit Hilfe von f eine Folge in $\mathcal{L}(X,Y)$, deren Glieder jeweils eindimensionales Bild haben.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Es sei X eine Banachraum. Zeigen Sie:

a) Jede schwach* konvergente Folge in X^* ist beschränkt in X^*.

b) Jede schwach konvergente Folge in X ist beschränkt in X.
Hinweis: Aufgabe 4 von Blatt 11.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Gegeben sei der Raum P_2 der Polynome vom Grade kleiner oder gleich zwei, als Teilraum von $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$.

(i) Zeigen Sie, dass die durch $f(p) := p'(1)$ definierte Abbildung $f : P_2 \to \mathbb{R}$ linear und stetig ist und berechnen Sie ihre Operatornorm.

(ii) Finden Sie explizit eine normerhaltende Fortsetzung von f auf $C[-1,1]$.

Hinweis: Wie lässt sich $p'(1)$ für $p \in P_2$ mit Hilfe von Funktionswerten von p angeben?

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1111SS/FA.html