Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer
Dipl. Math. F. Krügel

WS 2011/2012

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Übung

Abgabe: Montag, 17.10.2011, bis 10.00 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

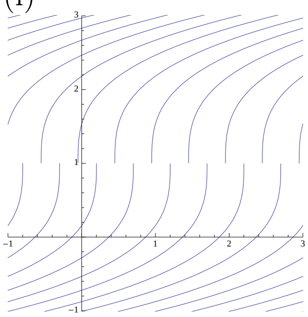
Aufgabe 1:
Schneebälle, Mottenkugeln und Bonbons haben wenigstens eines gemeinsam: ihre Volumina V vermindern sich beim Abschmelzen bzw. Lutschen mit einer zeitlichen Rate, die proportional zu der jeweils noch vorhandenen Oberfläche F ist:

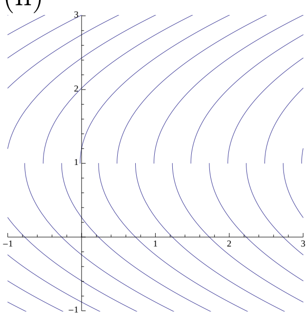
$$\frac{dV}{dt} = -\lambda F \qquad (\lambda > 0 \text{ konstant}).$$

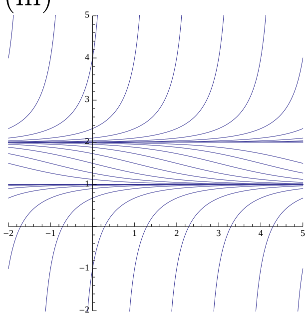
Sei etwa r_0 der Radius einer gerade ausgelegten Mottenkugel, $r(t)$ ihr Radius nach Ablauf der Zeit t. Wie groß ist $r(t)$?
Angenommen, die Mottenkugel habe in 60 Tagen ihr halbes Gewicht verloren. Nach wieviel Tagen ist ihr Radius auf ein Zehntel seiner Anfangsgröße geschrumpft?

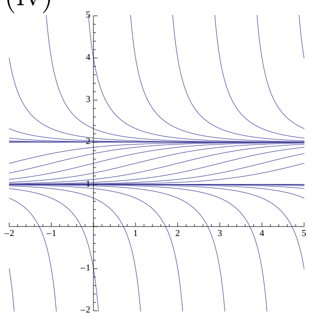
(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Betrachten Sie folgende Graphen in der (x, y)-Ebene, die ausgewählte Lösungen $y(x)$ jeweils einer der Differentialgleichungen (a)–(d) zeigen.

(i)


(ii)


(iii)


(iv)


Ordnen Sie die Graphen den folgenden Differentialgleichungen zu.

(a) $y' = y^2 - 3y + 2$

(b) $y' = -y^2 + 3y - 2$

(c) $y' = \dfrac{1}{y-1}$

(d) $y' = \dfrac{1}{(y-1)^2}$

Begründen Sie Ihre Antwort.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Ein Schiff fährt mit konstanter Geschwindigkeit $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ auf dem Meer. Zum Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$ geht der Antrieb des Schiffes kaputt, so dass das Schiff ab diesem Zeitpunkt durch den Wasserwiderstand, der proportional zur Geschwindigkeit des Schiffes ist, gebremst wird. Nach $t_1 = 5\,\mathrm{s}$ beträgt die Geschwindigkeit noch $8\,\mathrm{m/s}$. Leiten Sie eine Differentialgleichung für die Geschwindigkeit her und bestimmen Sie, wann das Schiff auf eine Geschwindigkeit von $1\,\mathrm{m/s}$ abgebremst hat.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Um 1920 stellte R. Pearl experimentell fest, dass die Änderungsrate dP/dt einer Population von Fruchtfliegen (Drosophila) mit der Populationsgröße $P(t)$ die Gleichung

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{5}P - \frac{1}{5175}P^2 \quad (t \text{ in Tagen gemessen})$$

erfüllt.
Anfänglich seien 10 Fruchtfliegen vorhanden. Zeigen Sie, dass die Population $P(t)$, wenn diese eine C^1-Funktion ist, die die obige Gleichung löst, monoton wächst, aber niemals mehr als 1035 Mitglieder hat. Bei welcher Populationsgröße beginnt die Wachstumsrate abzunehmen?

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1112WS/ODE.html