Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer
Dipl. Math. F. Krügel

WS 2011/2012

Gewöhnliche Differentialgleichungen

4. Übung

Abgabe: Montag, 7.11.2011, bis 11.40 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Eine Straßenbahn lege in ländlichem Gebiet zwischen zwei Haltestellen eine gerade Strecke von 1000 m zurück. Zu Beginn der Fahrt beschleunigt der Straßenbahnfahrer mit $1,5\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!{}_{\mathrm{s}^2}$, schaltet zu einem bestimmten Zeitpunkt direkt von Beschleunigung auf Bremsen um und bremst dann mit einer Beschleunigung von $-1\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!{}_{\mathrm{s}^2}$ ab.
Nach welcher Distanz muss der Fahrer umschalten, damit er an der nächsten Haltestelle zum Stehen kommt?
Hinweis:
$x(t)$ entspricht der gefahrenen Strecke zum Zeitpunkt t,
$v(t) = \dot{x}(t)$ ist die Geschwindigkeit,
$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$ ist die Beschleunigung.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Der Auslenkungswinkel φ des mathematischen Pendels erfüllt

$$\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi, \tag{1}$$

mit der konstanten Erdbeschleunigung g.

(a) Zeigen Sie, dass φ die Gleichung (1) genau dann löst, wenn $(x, v) := (\varphi, \dot{\varphi})$ das System

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -g \sin x \\ \dot{x} &= v \end{aligned} \tag{2}$$

löst, und dass für jede Lösung (x, v) von (2) gilt:

$$v\dot{v} + g(\sin x)\dot{x} = 0. \tag{3}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$v dv + g(\sin x) dx = 0$$

exakt ist. Geben Sie eine Stammfunktion an.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Wir betrachten die implizite Differentialgleichung

$$g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0 \tag{4}$$

im Gebiet $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, wobei

$$g(x,y) := -\frac{y}{x^2+y^2}; \qquad h(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2}$$

(a) Zeigen Sie, dass
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$$
gilt.

(b) Sei $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$. Berechnen Sie
$$\int_0^{2\pi} (g(\gamma(t)), h(\gamma(t))) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$
wobei "$\cdot$" das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ ist.

(c) Zeigen Sie nun, dass (4) nicht exakt ist. Nehmen Sie dazu an, es gäbe eine Stammfunktion F. Berechnen Sie
$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \right) dt$$
mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, und zeigen Sie, dass das dem Ergebnis von (b) widerspricht.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Differentialgleichung

$$\left[u^2 e^{(x+a)u^2} + 2ax^2u^4 \right] dx + \left[a(x+2)ue^{(x+a)u^2} + \frac{8}{3}ax^3u^3 \right] du = 0$$

exakt ist, und berechnen Sie die Lösungen.

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1112WS/ODE.html