Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer
Dipl. Math. F. Krügel

WS 2011/2012

Gewöhnliche Differentialgleichungen

5. Übung

Abgabe: Montag, 14.11.2011, bis 11.40 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Prüfen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf Exaktheit und bestimmen Sie gegebenenfalls einen integrierenden Faktor. Finden Sie Lösungen der Gleichungen in impliziter Form, und, wenn möglich, lösen Sie nach x bzw. y auf.

(a) $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$

(b) $(1 + 2x^2y^2)dx + yx^3dy = 0$

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Angenommen, eine Insektenpopulation u wird durch eine natürliche Räuberpopulation v gemäß dem Lotka-Volterra Modell kontrolliert. Danach treten kleine periodische Veränderungen der Population in der Umgebung des kritischen Punktes $(c/d, a/b)$ auf (in der Notation der Vorlesung). Es wird ein Insektizid eingesetzt mit dem Ziel, die Insektenpopulation zu reduzieren; das Insektizid ist jedoch auch für die Räuberspezies giftig. Wir gehen davon aus, dass das Insektizid die Beute bzw. die Räuber mit Proportionalitätsraten α bzw. β zu der jeweils gegenwärtigen Population tötet. Stellen Sie die modifizierte Differentialgleichung auf.

a) Bestimmen Sie den neuen Gleichgewichtspunkt, und vergleichen Sie ihn mit dem ursprünglichen Gleichgewichtspunkt.

b) Es sei nun $\alpha = a$. Angenommen, $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ sei Lösung des modifizierten Systems in diesem Fall, mit

$$(x(t), y(t)) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} (x_\infty, 0),$$

für ein $x_\infty > 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{c \log x(0) - dx(0)}{b} - y(0) = \frac{c \log x_\infty - dx_\infty}{b}$$

gilt.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie die stationären Punkte des autonomen Systems

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) + 3y_2(x) + 1 \\ y_2'(x) &= -2y_2(x) + 1 \quad . \end{aligned}$$

Zeichnen Sie das Richtungsfeld in ihrer Nähe genügend fein, so dass Sie sich den Verlauf der Lösungskurven anhand der Skizze überlegen können.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie die singulären Linienelemente und die Lösungen der Differentialgleichung

$$(y')^4 - 9y = 0.$$

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1112WS/ODE.html