Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer
Dipl. Math. F. Krügel

WS 2011/2012

Gewöhnliche Differentialgleichungen

6. Übung

Abgabe: Montag, 21.11.2011, bis 11.40 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Sei B ein Banachraum. Der Operator $T : B \to B$ sei surjektiv und expandierend, d.h. es existiert ein $q > 1$, so dass $\|T(x) - T(y)\| \geq q\|x - y\|$ für alle $x, y \in B$.
Beweisen Sie, dass T einen eindeutigen Fixpunkt $\bar{x} \in B$ hat.
Hinweis: Ist der Operator T bijektiv?

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Die Funktion $f(x, u)$ sei im Streifen $S = J \times \mathbb{R}$, $J = [0, a]$ stetig und genüge der Bedingung

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq \frac{k}{x}|u - v| \quad \text{für } 0 < x \leq a,\ u, v \in \mathbb{R}$$

mit $k < 1$. Weisen Sie nach, dass das Anfangswertproblem $u' = f(x, u)$ in J, $u(0) = \eta$, genau eine Lösung besitzt und dass sich diese durch sukzessive Approximation berechnen lässt.
Hinweis: Die Menge $B := \{u \in C(J) \mid \|u\| < \infty\}$ bildet einen Banachraum bezüglich der Norm $\|u\| := \sup\{|u(x)|/x \mid 0 < x \leq a\}$ (was Sie ohne Beweis verwenden dürfen). Zeigen Sie, dass der Operator T, definiert durch

$$(Tu)(x) := \int_0^x f(t, \eta + u(t))dt \quad ,$$

B nach B abbildet, und dort eine Kontraktion ist. Zeigen Sie ferner, dass die Fixpunkte von T bis auf eine Konstante die Lösungen des Anfangswertproblems sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Wenden Sie die Picard-Lindelöf-Iteration

$$\begin{aligned} y_0 &= \eta \\ y_{n+1} &= \eta + \int_\xi^x f(t, y_n(t))dt \end{aligned}$$

für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = xy(x) + 1 \quad , \quad y(0) = 0$$

an: Berechnen Sie genügend viele Iterationsschritte, um eine explizite Formel für y_n zu erkennen. Beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Geben Sie ein konkretes Anfangswertproblem der Form

$$y' = f(y) \ , \ y(0) = y_0 \ , \ f \text{ stetig}$$

an, das mehr als eine Lösung zulässt. Geben Sie zwei dieser Lösungen explizit an. Insbesondere kann damit das von Ihnen gewählte f die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf nicht erfüllen. Zeigen Sie dies noch einmal direkt.

(5 Punkte)