Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer
Dipl. Math. F. Krügel

WS 2011/2012

Gewöhnliche Differentialgleichungen

7. Übung

Abgabe: Montag, 28.11.2011, bis 11.40 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Es seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, und u, v seien Lösungen von

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(t,u), \\ \dot{v} &= g(t,v), \end{aligned}$$

auf einem Intervall $[a,b]$. Zeigen Sie für diese Situation folgendes Vergleichsprinzip:
Gilt $f(t,s) < g(t,s)$ für alle $(t,s) \in (a,b] \times W$, mit $W := u((a,b]) \cap v(((a,b])$, und entweder

$$u(a) < v(a)$$

oder

$$u(a) = v(a) \quad \text{und} \quad f(a,u(a)) < g(a,v(a)),$$

so folgt $u(t) < v(t)$ für alle $t \in (a,b]$.
Hinweis: Versuchen Sie einen Widerspruchsbeweis. Zeigen Sie zunächst, dass es dann einen Punkt $t_1 > a$ gibt mit $u(t_1) = v(t_1)$ und $u(t) < v(t)$ für $t \in (a, t_1)$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + xy^2 \quad , \quad y(0) = 0 \quad . \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die Lösung für ein $x_E > 0$ "explodiert". Finden Sie eine sinnvolle obere Schranke für x_E, mit Hilfe einer geeigneten Abschätzung der rechten Seite der Differentialgleichung und Aufgabe 1. Z.B. gilt: $1 + xy^2 > y^2$ für $x \geq 1$.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass für $x \in (-\infty, 0)$ die Lösung von (1) zwischen -1 und 0 bleibt.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Das Polygonzugverfahren ist in der Numerischen Mathematik auch unter dem Namen explizites Euler-Verfahren bekannt. Für ein Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \quad , \quad f \text{ stetig}$$

und eine gegebene Schrittweite $h > 0$ werden zwei Folgen konstruiert:

$$\begin{aligned} x_i &:= x_{i-1} + h \quad , \\ y_i &:= y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}) \quad , \quad i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\} \quad . \end{aligned}$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die stückweise lineare Funktion

$$p_h(x) = y_{i-1} + (x - x_{i-1})\frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad , \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

für $h \to 0$ gegen eine Lösung des Anfangswertproblems konvergiert.

(a) Lösen Sie das Problem

$$y' = 3y(1-y) \quad , \quad y(0) = \frac{1}{2} \quad .$$

(b) Bestimmen Sie die Approximationen $p_h(x)$ dieser Lösung für $x \in [0, 2]$ für folgende Schrittweiten:

$$h = \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6} \quad \text{(d.h. für } n = 2, 3, 4, 6\text{)},$$

indem Sie jeweils die Folge $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ berechnen. (Für $n = 4$ und $n = 6$ reicht es, wenn Sie bis $i = 3$ rechnen.)

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1112WS/ODE.html