**Prof. Dr. B. Kawohl**
**Dr. S. Krömer**
**Dipl. Math. F. Krügel**

**WS 2011/2012**

**Gewöhnliche Differentialgleichungen**

**8. Übung**

**Abgabe: Montag, 5.12.2011, bis 11.40 Uhr**
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

**Aufgabe 1:**
Zu den stärksten Quellen von Gammastrahlen in abgebrannten Brennstäben aus Kernkraftwerken gehört unter anderem Plutonium-241 ($Pu^{241}$), welches mit einer Halbwertszeit von 14 Jahren in Americium-241 zerfällt. Americium-241 ($Am^{241}$) zerfällt seinerseits mit einer Halbwertszeit von 432 Jahren in Neptunium-237 ($Np^{237}$).

(a) Wir betrachten zunächst zwei radioaktive Nuklide $A$ und $B$, wobei $B$ das Zerfallsprodukt von $A$ sei. Nach dem Zerfallsgesetz ist die Zerfallsrate (die zeitliche Änderung der Stoffmenge eines Nuklids) proportional zur vorhandenen Stoffmenge. Hier haben wir noch den zusätzlichen Effekt, dass $B$ neu gebildet wird mit einer Rate, die gleich der Zerfallsrate von $A$ ist. Stellen Sie ein System von Differentialgleichungen für die Stoffmengen $y_A$ und $y_B$ auf. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems bei vorgegebenen Anfangswerten von $y_A$ und $y_B$ zum Zeitpunkt Null.

(b) Die Halbwertszeit ist die Zeit, nach der die Hälfte der ursprünglichen Stoffmenge vorhanden ist, wobei das einfache Zerfallsgesetz zugrunde gelegt wird (ohne Neubildungen). Wie hängt die Halbwertszeit mit dem Proportionalitätsfaktor zusammen? Welche Daten ergeben sich bei $Pu^{241}$ und $Am^{241}$?

(c) Die Intensität der ausgesandten Gammastrahlung eines Nuklids ist proportional zur Stoffmenge, wobei der Proportionalitätsfaktor bei $Am^{241}$ etwa 30000mal so hoch ist wie bei $Pu^{241}$. Zur Zeit $t = 0$ sei kein $Am^{241}$ vorhanden. Nach welcher Zeit erreicht die Gesamtstrahlungsintensität von $Pu^{241}$ und $Am^{241}$ ihr Maximum?

**(5 Punkte)**

**Aufgabe 2:**
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und es gebe eine Konstante $C > 0$ derart, dass für alle $y > 1$ gilt:

$$0 \leq f(y) \leq Cy \ln y \ .$$

Zeigen Sie, dass für jedes $y_0 > 1$ Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0$$

nicht explodieren, d.h. dass jede auf $[0, T)$ definierte Lösung beschränkt ist. Geben Sie eine explizite Schranke in Abhängigkeit von $T > 0$ an.
**Hinweis:** $\frac{d}{dy} \ln \ln y = \frac{1}{y \ln y}$ für $y > 1$.

**(5 Punkte)**

**Aufgabe 3:**

(a) Finden Sie eine Folge von gleichmäßig beschränkten stetigen Funktionen $\{f_n\}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die nicht gleichgradig stetig ist. Weisen Sie dies nach.

(b) Finden Sie eine gleichgradig stetige Folge von Funktionen $\{f_n\}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die nicht gleichmäßig beschränkt ist. Weisen Sie dies nach.

**(5 Punkte)**

**Aufgabe 4:**
Wir betrachten auf $\mathbb{R}^n$ die Normen

$$\begin{aligned} \|x\|_p &:= \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad , \quad p \in [1, \infty) \quad , \\ \|x\|_\infty &:= \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x_i| \quad . \end{aligned}$$

(a) Zeichnen Sie die Einheitssphäre bezüglich $\|\cdot\|_p$ für $p = 1$, $p = 2$ und $p = \infty$ im $\mathbb{R}^2$ im gleichen Koordinatensystem (Skalierung etwa $1 \mathrel{\widehat{=}} 4$cm).

(b) Beweisen Sie, dass die $\infty$-Norm und die $p$-Norm für $p \in [1, \infty)$ auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, und bestimmen Sie die Konstanten. Folgern Sie daraus, dass die $p$-Norm gegen die $\infty$-Norm konvergiert für $p \to \infty$.

**(5 Punkte)**

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

**http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1112WS/ODE.html**