Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer
Dipl. Math. F. Krügel **WS 2011/2012**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

9. Übung

Abgabe: Montag, 12.12.2011, bis 11.40 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Ein einfaches Modell zur Beschreibung von Sprints in der Leichtathletik (Länge der Laufstrecke etwa bis 290 m) ist durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= f - \sigma v \quad . \end{aligned}$$

Dabei ist $x = x(t)$ der Abstand zum Startpunkt des Rennens und $v = v(t)$ die Geschwindigkeit jeweils zum Zeitpunkt t. Es gilt:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \qquad \text{(Startpunkt)} \\ v(0) &= 0 \qquad \text{(Startgeschwindigkeit)} \end{aligned}$$

Die Parameter σ und f sind positive Konstanten.

(a) Handelt es sich hierbei um ein autonomes System?

(b) Bestimmen Sie $x(t)$ und $v(t)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = f/\sigma$, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{x(t)}{t} = f/\sigma$.

(d) Bestimmen Sie den Laufweg nach 10 Sekunden für $\sigma = 0{,}581$, $f = 7{,}10$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Wir betrachten die nichtlineare Schwingungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + h(x(t)) = 0$$

mit einer lokal Lipschitz-stetigen Funktion h, wobei $xh(x) > 0$ für $x \neq 0$ gelte und $h(0) = 0$. Sei H das Potential wie in der Vorlesung definiert. Wir betrachten eine periodische Lösung $x(t)$ mit $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.

(a) Die Dauer V der Viertelschwingung ist die Zeit, nach der $\dot{x}(V) = 0$ und $r := x(V) > 0$ gilt. Zeigen Sie

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^r \frac{1}{\sqrt{H(r) - H(s)}} ds$$

(b) Sei $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\dot{x}(c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(c+t) = x(c-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Hinweis: Die beiden Funktionen lösen dasselbe Anfangswertproblem (Welches?).

(c) Wir nehmen jetzt zusätzlich an, dass h ungerade ist, d.h. $h(-\tilde{x}) = -h(\tilde{x})$ für alle $\tilde{x} \in \mathbb{R}$. Sei $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$x(c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(c+t) = -x(c-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(d) Sei h ungerade. Zeigen Sie, dass die Lösung T-periodisch ist mit $T = 4V$.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Wir betrachten das lineare System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 3x-y \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Überprüfen Sie, dass $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren der Systemmatrix A sind, und geben Sie die Eigenwerte an.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen von (1), die von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha(t) v_1 \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \beta(t) v_2$$

sind. Welche Gleichung muss dazu α bzw. β erfüllen?

(c) Bestimmen Sie die Lösung von (1) zum Anfangswert $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis. $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 4v_1 + v_2$.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Es seien $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Für eine Lösung $(x, y): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ von

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \\ \dot{y} &= g(x,y) \end{aligned}$$

nennen wir die Menge

$$T_{(x,y)} := \{(x(t), y(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

die Trajektorie von (x, y).
Zeigen Sie, dass sich verschiedene Trajektorien nicht schneiden, können, also dass

$$T_{(x_1,y_1)} \cap T_{(x_2,y_2)} \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad T_{(x_1,y_1)} = T_{(x_2,y_2)}.$$

Hinweis. Schneiden sich die Trajektorien, so gibt es ein $s \in \mathbb{R}$ (wieso?), so dass (x_1, y_1) und $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) := (x_2(\cdot + s), y_2(\cdot + s))$ das gleiche Anfangswertproblem lösen (welches?).

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1112WS/ODE.html