Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer
Dipl. Math. F. Krügel

WS 2011/2012

Gewöhnliche Differentialgleichungen

10. Übung

Abgabe: Montag, 19.12.2011, bis 11.40 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

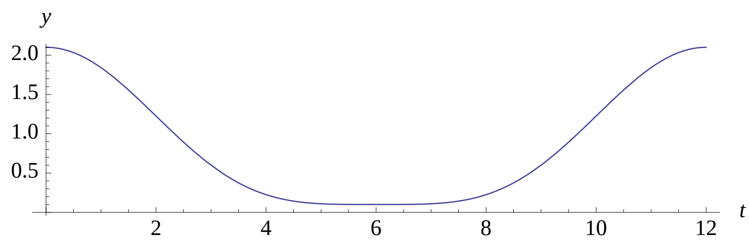
Aufgabe 1:
Das Bild zeigt die symmetrische Lösung $t \mapsto y(t)$ einer Differentialgleichung. Zu welchem Typ Differentialgleichung könnte sie gehören? Man hat folgende Auswahl:

(a) $y'(t) = f(y(t))$,

(b) $y''(t) + f(y'(t)) = 0$,

(c) $y''(t) + y'(t) = f(y(t))$,

(d) $y''(t) = f(y(t))$,



mit Lipschitzstetigem f. Begründen Sie, weshalb Sie gewisse Typen ausschließen.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Es seien $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkte, stetige Funktionen. Wir betrachten das lineare System

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \text{ mit } A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \text{ und } x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie alle Wronski-Determinanten des Systems, also alle Funktionen der Form $w(t) = \det(x(t)\big|y(t))$, wenn x und y Lösungen von (1) sind. Welche Gleichung muss w erfüllen?

(b) Sei $Q := \left\{ \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \middle| \theta_1, \theta_2 \in [0,1] \right\}$ und
$Q(t) := \left\{ x(t) \middle| x \text{ ist eine Lösung von (1) mit } x(0) \in Q \right\}$.
Zeigen Sie, dass

$$Q(t) = \{\theta_1 e_1(t) + \theta_2 e_2(t) \big| \theta_1, \theta_2 \in [0,1]\},$$

wobei e_1, e_2 die Lösungen von (1) mit $e_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind.

(c) Angenommen, $a_{11}(t) = -a_{22}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $Q(t)$ für alle t Flächeninhalt $|\det(e_1(t)\big|e_2(t))| = 1$ hat.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Wir betrachten das folgende System 3. Ordnung:

$$y'''(x) + A_2(x)y''(x) + A_1(x)y'(x) + A_0(x)y(x) = 0 \tag{2}$$

für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, mit gegebenem $A_0, A_1, A_2 : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ (stetig und beschränkt).

(a) Schreiben Sie (2) um in ein äquivalentes System 1. Ordnung.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge aller Lösungen y von (2) einen Vektorraum bildet, und bestimmen Sie dessen Dimension in Abhängigkeit von n.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Wir betrachten das Gleichungssystem

$$y'(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{x^2} & 0 \end{pmatrix} y(x), \quad x \in (0, \infty). \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie, dass $y_1(x) := \begin{pmatrix} 2x^2 \\ 4x \end{pmatrix}$ eine Lösung von (3) ist.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Reduktionsverfahrens von d'Alembert ein Fundamentalsystem von (3).

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1112WS/ODE.html