Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer
Dipl. Math. F. Krügel

WS 2011/2012

Gewöhnliche Differentialgleichungen

12. Übung

Abgabe: Montag, 23.1.2012, bis 11.40 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Finden Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen zu

$$\begin{array}{rcrrr} \dot{x}_1 & = & 5x_1 & +x_2 & +2x_3 \\ \dot{x}_2 & = & 3x_1 & +3x_2 & +2x_3 \\ \dot{x}_3 & = & -6x_1 & -2x_2 & -2x_3 \end{array} \tag{1}$$

Bestimmen Sie dabei auch die Jordan-Normalform der Systemmatrix.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Wir betrachten das zur skalaren Gleichung

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} - bx = 0$$

äquivalente System

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & 2ay + bx \end{array}$$

mit reellen Parametern a, b.

(a) Markieren Sie in der a-b-Ebene alle Flächen, in denen dieses Sytem einen stabilen oder instabilen Knoten, einen Sattelpunkt oder einen stabilen oder instabilen Strudel besitzt. (Auf die Untersuchung der Grenzfälle können Sie hier verzichten.)

(b) Wir betrachten nun den Fall, dass die Parameter auf der Parabel $b = -a^2$ liegen. Bestimmen Sie dafür die allgemeine Lösung in Abhängigkeit von a. Welches Verhalten haben diese Lösungen für $t \to +\infty$?

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Gleichungen.

(a) $y'' - 5y' + 6y = e^{-2x}$

(b) $y''' - y'' + y' - y = \sin 2x$

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Wir nehmen an, dass der Stoßdämpfer eines durchschnittlichen Autos, das mit konstanter Geschwindigkeit über Bodenwellen fährt, durch einen harmonischen Oszillator mit kleiner Dämpfung modelliert werden kann. Betrachten Sie dazu die folgende Schwingungsgleichung:

$$u''(t) + 2au'(t) + bu(t) = \cos \omega t,$$

mit Parametern $a \geq 0$, $b > 0$, $\omega \neq 0$.

(a) Es sei $a = 0$, und die Eigenschwingung des Stoßdämpfers habe eine Periode von 2 Sekunden. Wie weit sollten die Bodenwellen auseinanderliegen, damit ein Auto bei einer Geschwindigkeit von 20 km/h immer heftiger auf und ab schwingt?

(b) Untersuchen Sie das Langzeitverhalten der obigen Gleichung für kleines $a > 0$ in folgenden Teilschritten.

- Zeigen Sie, dass für $t \to \infty$ jede Lösung gegen eine $\frac{2\pi}{\omega}$-periodische Funktion konvergiert.
- Finden Sie die Amplitude $A = A(\omega, a, b)$ der Lösung für $t \to \infty$.
- Finden Sie die Frequenz $\omega = \omega_M(a, b)$, für die die Amplitude A ihr Maximum $M = M(a, b)$ annimmt.
- Vergleichen Sie ω_M mit der Frequenz der Lösungen der homogenen Gleichung für kleine Dämpfung a.
- Zeigen Sie, dass für festes b die maximale Amplitude $M(a, b)$ proportional zu $\frac{1}{a}$ für $a \to 0$ ist, d.h. insbesondere gilt $\lim\limits_{a \to 0} M(a, b) = +\infty$.

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1112WS/ODE.html