Prof. Dr. B. Kawohl
Dipl.-Math. F. Krügel

SS 2012

Partielle Differentialgleichungen

0. Übung

Die Aufgaben werden gemeinsam in der Übung am Mittwoch (den 04.04.2012) bearbeitet.

Aufgabe 1:
Seien $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ ein C^2-Diffeomorphismus.

(a) Bestimmen Sie einen Differentialoperator $\tilde{\Delta}$ derart, dass für alle $u \in C^2(\Omega)$ gilt

$$\tilde{\Delta}(u \circ \Phi) = (\Delta u) \circ \Phi$$

(Hier ist Δ natürlich der Laplace-Operator.)

(b) Was ergibt sich im Falle, dass Φ die Polarkoordinatenabbildung

$$\begin{aligned} (0,\infty) \times (-\pi,\pi) &\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \le 0\} \\ (r,\theta) &\mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

ist?

Aufgabe 2:
Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß:

(a) $\int_\Omega u_{x_i}(x)dx = \int_{\partial\Omega} u(x)\nu_i(x)dS(x), \quad i = 1,\dots,n,$

(b) $\int_\Omega u_{x_i}(x)v(x)dx = -\int_\Omega u(x)v_{x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\nu_i(x)dS(x), \quad i = 1,\dots,n.$

Hier ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Rand von der Klasse C^1, $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, und $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ ist die äußere Normale an $\partial\Omega$.