Prof. Dr. B. Kawohl
Dipl.-Math. F. Krügel **SS 2012**

Partielle Differentialgleichungen

1. Übung

Abgabe: Dienstag, 10.04.2012, bis 12:00 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ der (offene) Kreiskegel mit Höhe $h > 0$ und Basis mit Radius $R > 0$, also

$$K := \left\{ (x, y, z) \mid z \in (0, h), x^2 + y^2 < \frac{R^2}{h^2} z^2 \right\}$$

Bestimmen Sie das Volumen von K.
Hinweis: Benutzen Sie eine Transformation auf Zylinderkoordinaten.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei f eine rotationssymmetrische Funktion $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, d.h. es existiert eine Funktion $\tilde{f} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ derart, dass $f(x) = \tilde{f}(|x|)$ gilt, wobei

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Leiten Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\tilde{f}$ her, die zur Gleichung $\Delta f = 0$ äquivalent ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 3: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u_{xx} - u_{yy} = f. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die Gestalt von (1) in den Koordinaten

$$(s, t) = (x + y, x - y)$$

(b) Zeigen Sie, dass jedes Paar von Funktionen $g, h \in C^2(\mathbb{R})$ durch

$$u(x, y) = g(x - y) + h(x + y) \tag{2}$$

eine Lösung liefert zu

$$u_{xx} - u_{yy} = 0. \tag{3}$$

(c) Zeigen Sie, dass sich jedes $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, das (3) erfüllt, schreiben lässt wie in (2).

(8 Punkte)