Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2012**
Dipl.-Math. F. Krügel

Partielle Differentialgleichungen

2. Übung

Abgabe: Montag, 16.04.2012, bis 12:00 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + b \cdot Du(x,t) + cu(x,t) &= 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0,T) \quad , \\ u(x,0) &= g(x) \text{ auf } \mathbb{R}^n \quad . \end{aligned}$$

Hierbei seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ fest, $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Die Funktion $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sei gegeben.
Berechnen Sie eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0,T), \mathbb{R})$ von (1), (2).
Hinweis: Lösen Sie das Problem zuerst für $b = 0$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\eta(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

zur Klasse $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gehört.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst für die Funktion $\gamma(r) := e^{\frac{1}{r^2-1}}$, dass ihre k-te Ableitung die Gestalt

$$\gamma^{(k)}(r) = \frac{P_k(r)}{(r^2-1)^{2k}} e^{\frac{1}{r^2-1}}$$

mit einem Polynom P_k hat.

(4 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt *subharmonisch*, falls

$$-\Delta u \leq 0$$

gilt. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Sei $u \in C^2(\Omega)$ subharmonisch. Dann gilt für alle $r > 0$ und $x \in \Omega$ mit $B(x,r) \subset \Omega$:

$$\fint_{B(x,r)} u(y)dy \geq u(x)$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion $v(r) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y)$ monoton steigend ist.

(b) Sei Ω beschränkt, $u \in C^2(\Omega)$ subharmonisch und stetig fortsetzbar auf $\overline{\Omega}$. Dann gilt $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$.

Hinweis: Nehmen Sie an, das Maximum wird im Inneren angenommen. Verwenden Sie (a), um zu zeigen, dass in diesem Falle u konstant in jeder noch in Ω enthaltenen Kugel um diesen Punkt ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(a) \leq 0$ für $a > 0$; $f(a) \geq 0$ für $a < 0$.
Zeigen Sie: $u = 0$ ist die einzige Lösung in $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ von

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

(b) $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ erfülle

$$\begin{cases} -\Delta u = u - u^3 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Zeigen Sie: $-1 \leq u \leq 1$ in $\overline{\Omega}$.

Verwenden Sie jeweils das Maximumprinzip von Aufgabe 3.

(5 Punkte)