Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2012**
Dipl.-Math. F. Krügel

Partielle Differentialgleichungen

3. Übung

Abgabe: Montag, 23.04.2012, bis 12:00 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Wir betrachten den Streifen $\Omega := \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie durch den Ansatz $u(x_1, x_2) = v(x_1) \cdot w(x_2)$ eine klassische Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x_1, -\pi) = u(x_1, \pi) = e^{x_1} & x_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ist die Lösung eindeutig?

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen auf Ω.

(a) $(u_k)_k$ konvergiere lokal gleichmäßig gegen eine Funktion u. Zeigen Sie, dass u harmonisch ist.
Hinweis: Mittelwerteigenschaft

(b) Sei $(u_k)_k$ monoton wachsend und $\{u_k(x_0)\}_k$ für ein $x_0 \in \Omega$ beschränkt. Zeigen Sie, dass für jedes zusammenhängende $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ mit $x_0 \in \tilde{\Omega}$ gilt: $(u_k)_k$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion u in $\tilde{\Omega}$.
Hinweis: Harnacksche Ungleichung

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie: $u \equiv 0$ ist die einzige Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ von

$$\begin{cases} \Delta u(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \partial_k u(x) + c(x) u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

wobei $a_1, ..., a_n, c \in C(\Omega)$ und $c(x) < 0$ für alle $x \in \Omega$.
Hinweis: Zeigen Sie $\max_{\bar{\Omega}} u \leq 0$ und $\min_{\bar{\Omega}} u \geq 0$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei Ω der Kreisausschnitt $\Omega := \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 0 < r < 1 \text{ und } 0 < \theta < \frac{5}{4}\pi\right\}$.

(a) Bestimmen Sie neben $u \equiv 0$ eine weitere harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega} \setminus \{0\})$, die den Wert 0 auf $\partial\Omega \setminus \{0\}$ annimmt.
Hinweis: Betrachten Sie u in Polarkoordinaten: $\tilde{u}(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, und machen Sie den Ansatz $\tilde{u}(r, \theta) = v(r)w(\theta)$.

(b) Nach dem Maximumprinzip aus der Vorlesung nehmen harmonische Funktionen ihr Maximum auf dem Rand an. Wie verhält es sich mit u?

(c) Sind u und Du auf Ω integrierbar?

(6 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
`http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1212SS/PDE.html`