Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2012**
Dipl.-Math. F. Krügel

Partielle Differentialgleichungen

4. Übung

Abgabe: Montag, 30.04.2012, bis 12:00 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
In der Vorlesung wurde als Green-Funktion für die Einheitskugel $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ die Funktion

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi\left(|x|y - \frac{x}{|x|}\right)$$

angegeben, wobei Φ die Fundamentallösung für $\mathbb{R}^n$ des Laplace-Operators ist.

(a) Zeigen Sie, dass G tatsächlich die Green-Funktion ist.

(b) Leiten Sie im Fall $n = 2$ aus dieser Darstellung die ebenfalls in der Vorlesung angegebene Poisson-Formel

$$u(x) = \frac{1-|x|^2}{2\pi} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{|x-y|^2} dS(y)$$

für die Lösung u des Dirichlet-Problems $\Delta u = 0$ auf $B(0,1)$ mit durch $g \in C(\partial B(0,1))$ gegebenen Randwerten her.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $\Omega := B(0,r)$ eine Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit Radius $r > 0$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine auf Ω harmonische Funktion, die keine negativen Werte auf $\partial\Omega$ annimmt.
Zeigen Sie mit Hilfe der Poissonschen Formel aus der Vorlesung, dass für alle $x \in \Omega$ gilt:

$$r^{n-2} \frac{r-|x|}{(r+|x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq r^{n-2} \frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}} u(0) \quad .$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $p \in (1,\infty)$. Bestimmen Sie eine Lösung der Gestalt $u(x,t) = w(t)v\left(\frac{|x|^2}{t}\right)$ für die Differentialgleichung

$$u_t(x,t) - \frac{1}{p}\Delta_x u(x,t) - \frac{p-2}{p}\frac{1}{|D_x u(x,t)|^2}\sum_{j,k=1}^{n} u_{x_j x_k}(x,t) u_{x_j}(x,t) u_{x_k}(x,t) = 0$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta_x u = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass dann auch

$$v(x,t) := x \cdot D_x u(x,t) + 2t u_t(x,t)$$

eine Lösung der Gleichung ist.

(b) Finden Sie eine Lösung von

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + cw = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ w(x,0) = u(x,0) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} ,$$

in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$ und der Lösung u der Wärmeleitungsgleichung.

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
`http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1212SS/PDE.html`