Prof. Dr. B. Kawohl
Dipl.-Math. F. Krügel **SS 2012**

Partielle Differentialgleichungen

5. Übung

Abgabe: Montag, 07.05.2012, bis 12:00 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Zeigen Sie

$$\int_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} d(s,y) = 4$$

wobei

$$E(1) = \left\{ (-s,y) \mid s > 0, y \in \mathbb{R}^n \text{ und } \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4s}} \geq 1 \right\}$$

Hinweis: Führen Sie zunächst die Integration nach $r = |y|$ durch. Bringen Sie dann das verbleibende Integral nach s durch eine geeignete Substitution in eine Form, die $\Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right)$ enthält. Eigenschaften der Gamma-Funktion sind: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$; $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ und die Oberfläche der Einheitssphäre lässt sich mit Hilfe der Gamma-Funktion ausdrücken.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$ gilt:

$$\frac{1}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}} dy \to 0$$

für $t \to 0$.
Bemerkung: Diese Aussage wurde im Beweis des Satzes 1 (Lösung des Cauchyproblems) in der Vorlesung verwendet.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Formulieren Sie unter geeigneten Voraussetzungen einen Satz zur Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems zur Wärmeleitungsgleichung für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ und beweisen Sie ihn. Verwenden Sie ein geeignetes Maximumprinzip aus der Vorlesung.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $u(t,x) = v(t)w(x)$ Lösungen des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & t > 0, x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in [0,\pi] \end{cases} \tag{1}$$

für geeignete g. Wie lautet die Lösung von (1) für $g(x) = \sin(3x) + \sin(4x)$?

(b) Sei nun $g(x)$ durch eine auf $[0,\pi]$ gleichmäßig absolut konvergente Fourierreihe der Form

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx)$$

gegeben. Bestimmen Sie eine formale Lösung $u(x,t)$ von (1) in Form einer Reihe. Zeigen Sie deren gleichmäßige Konvergenz auf $[0,\pi] \times [0,\infty)$.

Bemerkung: Ähnlich kann man auch lokal gleichmäßige Konvergenz der Reihen zu u_t und u_{xx} in $(0,\pi) \times (0,\infty)$ zeigen und daraus folgt, dass u eine klassische Lösung von (1) ist.

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

`http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1212SS/PDE.html`