Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2012**
Dipl.-Math. F. Krügel

Partielle Differentialgleichungen
6. Übung

Abgabe: Montag, 14.05.2012, bis 12:00 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ die Gleichung

$$-y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} - x^2 u_{yy} + 2xu_x + 2yu_y = 0 \tag{1}$$

Schreiben Sie (1) in Polarkoordinaten um, d.h. bestimmen Sie eine Gleichung für $\tilde{u}(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, die zu (1) äquivalent ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } (0,\pi)\times\mathbb{R} \\ u(x,0) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sin(jx) & x \in (0,\pi) \\ u_t(x,0) = \sum_{j=1}^N \beta_j \sin(jx) & x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, und für jedes $t \in \mathbb{R}$ habe $u(\cdot,t)$ kompakten Träger.

(a) Für $t \in \mathbb{R}$ sei die Energie $E(t)$ von u definiert durch

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t(x,t)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |D_x u(x,t)|^2 dx$$

Zeigen Sie: Ist u Lösung der Wellengleichung $u_{tt} - \Delta_x u = 0$, dann ist E konstant.

(b) Definieren Sie eine Energie $\tilde{E}(t)$, die konstant ist, falls u die Gleichung

$$u_{tt} - \Delta_x u + u = 0$$

löst.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ Lösung der eindimensionalen Wellengleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$, mit Anfangsdaten $u(x,0) = g(x)$, $u_t(x,0) = h(x)$, wobei $\operatorname{supp} g \cup \operatorname{supp} h \subset [-r,r]$ gelte.

(a) Zeigen Sie für alle $t > 0$: $\operatorname{supp} u(\cdot,t) \subset [-r-t, r+t]$.

(b) Zeigen Sie, dass es $T > 0$ gibt, so dass für alle $t \geq T$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} u_t(x,t)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} u_x(x,t)^2 dx$$

Hinweis: Nach der d'Alembert-Formel gilt

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= F(x+t) - G(x-t) \quad , \\ u_x(x,t) &= F(x+t) + G(x-t) \end{aligned}$$

mit $F = \frac{1}{2}(g' + h)$, $G = \frac{1}{2}(g' - h)$.

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

`http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1212SS/PDE.html`