Prof. Dr. B. Kawohl
Dipl.-Math. F. Krügel **SS 2012**

Partielle Differentialgleichungen

7. Übung

Abgabe: Montag, 21.05.2012, bis 12:00 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Sei $T > 0$ und $u \in C^{2,1}((0,1) \times (0,T)) \cap C([0,1] \times [0,T])$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0 \qquad \text{auf } (0,1) \times (0,T)$$

Es gelte: $u(0,T) > 0$, $u(1,T) > 0$ und $u(x,T) < 0$ für ein $x \in (0,1)$. Zeigen Sie, dass u auf dem parabolischen Rand

$$P := (\{0\} \times [0,T]) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0,T])$$

mindestens zwei Nullstellen hat.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei u die Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

mit Funktionen $g \in C_0^3(\mathbb{R}^3)$, $h \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$ (das heißt: g und h haben kompakten Träger; es gibt also $R > 0$, so dass $g(x) = 0$, $h(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$).
Zeigen Sie mit Hilfe der Kirchhoffschen Formel: Es gibt eine Konstante C, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ und $t > 0$ gilt:

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{t}$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems der inhomogenen Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin(t-x) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x}\cos x & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 2e^{-x}\sin x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Zeigen Sie mit Induktion nach k das folgende Lemma aus der Vorlesung: Für alle C^{k+1}-Abbildungen $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt:

(a)
$$\frac{d^2}{dr^2}\left(\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right)\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k}\left(r^{2k}\frac{d}{dr}\phi(r)\right)$$

(b)
$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) = \sum_{j=0}^{k-1}\beta_{j,k}r^{j+1}\frac{d^j}{dr^j}\phi(r)$$

wobei $\beta_{j,k}$ Konstanten sind (unabhängig von ϕ) und $\beta_{0,k} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k-1)$.

(6 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
`http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1212SS/PDE.html`