Prof. Dr. B. Kawohl
Dipl.-Math. F. Krügel **SS 2012**

Partielle Differentialgleichungen
8. Übung

Abgabe: Montag, 04.06.2012, bis 12:00 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Sei $n \geq 2$, $a \in (0, n-1)$ und $B := B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitskugel. Wir betrachten die Funktionen $u(x) = |x|^{-a}$ und $v_j(x) := -ax_j|x|^{-a-2}$ auf B.

(a) Zeigen Sie: $u, v_j \in L^1_{\text{loc}}(B)$.

(b) Zeigen Sie: v_j ist schwache Ableitung in x_j-Richtung von u.

(c) Für welche a, p gilt $u \in W^{1,p}(B)$?

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $p \in (1, \infty)$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt $C > 0$, so dass für alle $u \in C^1(I)$ gilt:

$$\|u\|_\infty \leq C(\|u\|_1 + \|u'\|_1)$$

(b) Es gibt $C > 0$, so dass für alle $u \in C^1(I)$ mit $u(a) = 0$ gilt:

$$\|u\|_p \leq C\|u'\|_p$$

Dabei ist $\|v\|_p = \left(\int_I |v|^p\right)^{1/p}$ (auch für $p = 1$) und $\|v\|_\infty = \sup_I |v|$.
Hinweis: Aus der Hölder-Ungleichung folgt

$$\int_a^b v(t)dt \leq (b-a)^{\frac{p-1}{p}} \|v\|_p$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass $W^{1,p}(\Omega)$ vollständig ist (Natürlich dürfen Sie verwenden, dass $L^p(\Omega)$ vollständig ist).

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, A eine Matrix mit Einträgen $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Sei $a_0(x) \geq 0$. Es gebe ein $\gamma > 0$ so dass für fast alle $x \in \Omega$ und für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\sum_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \gamma|\xi|^2$$

Sei $E : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$E(v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} a_{i,j}(x)\partial_i v(x) \partial_j v(x) + a_0(x)v(x)^2 - 2f(x)v(x) \right) dx$$

(a) Zeigen Sie: Für alle $v, w \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und $t \in (0,1)$ gilt: Ist $\|D(v-w)\|_2 > 0$, dann gilt

$$E((1-t)v + tw) < (1-t)E(v) + tE(w)$$

(b) Folgern Sie: Sind u und $\tilde{u}$ Minima von E, dann gilt $\|D(u-\tilde{u})\|_2 = 0$ (Insbesondere folgt daraus: $u = \tilde{u}$ fast überall, das heißt, E hat nur ein Minimum).

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

`http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1212SS/PDE.html`