Prof. Dr. B. Kawohl
Dipl.-Math. F. Krügel **SS 2012**

Partielle Differentialgleichungen

9. Übung

Abgabe: Montag, 11.06.2012, bis 12:00 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Sei $\theta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Einträgen $a_{j,k}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$\sum_{j,k\in\{1,\dots,n\}} a_{j,k}\xi_j\xi_k \geq \theta|\xi|^2$$
2. Alle Eigenwerte von A sind größer oder gleich θ.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Zur Erinnerung: Die Gleichung zweiter Ordnung
$$\sum_{j,k\in\{1,\dots,n\}} a_{j,k}(x)u_{x_j,x_k}(x) + \sum_{j\in\{1,\dots,n\}} b_j(x)u_{x_j}(x) + c(x)u(x) = 0$$
auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (wobei $a_{j,k}$, b_j und c Abbildungen $\Omega \to \mathbb{R}$ sind) heißt elliptisch, falls es $\theta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$\sum_{j,k\in\{1,\dots,n\}} a_{j,k}(x)\xi_j\xi_k \geq \theta|\xi|^2$$
Welche der folgenden Gleichungen sind elliptisch?

(a) $u_{tt} - u_{xx} = 0$ (auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$)

(b) $u_t - u_{xx} = 0$ (auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$)

(c) $4(xu_{xx} - xu_{xy} + yu_{xy} + yu_{yy}) + yu_{xx} + xu_{yy} = 0$ (für $(x,y) \in (\varepsilon,\infty)^2$, wobei $\varepsilon > 0$)

Natürlich sind die Antworten zu beweisen.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Für $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $k \in \{1,\dots,n\}$ sei $\tau_k^h(x) := x + he_k$ die Translation um h in die k-te Richtung und
$$D_k^h u := \frac{1}{h}(u \circ \tau_k^h - u)$$
der Differenzenquotient. Zeigen Sie

(a) (Partielle Integration) Für $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (D_k^h u) v = - \int_{\mathbb{R}^n} u(D_k^{-h} v)$$

(b) (Produktregel) Für $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$D_k^h(uv) = u D_k^h v + (D_k^h u)(v \circ \tau_k^h)$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $k \in \{1, ..., n\}$, $1 \leq p < \infty$ und $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, so dass $\operatorname{supp} u \subset U \subset\subset \Omega$ (also insbesondere $d := \operatorname{dist}(U, \partial\Omega) > 0$). Sei $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h| < d$ (dann ist $D_k^h u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ definiert). Zeigen Sie

$$\|D_k^h u\|_p \leq \|D_k u\|_p$$

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

(6 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

`http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1212SS/PDE.html`