Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2012**
Dipl.-Math. F. Krügel

Partielle Differentialgleichungen

10. Übung

Abgabe: Montag, 18.06.2012, bis 12:00 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Seien $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete und $\Psi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ ein C^2-Diffeomorphismus, und für alle $y \in \tilde{\Omega}$ gelte $\det D\Psi(y) = 1$. Sei $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $\tilde{u} := u \circ \Psi \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\tilde{\Omega})$. Es gelte $Lu = f$ im schwachen Sinne, wobei

$$Lv = -\sum_{j,k \in \{1,\dots,n\}} (a_{j,k} v_{x_j})_{x_k} + a_0 v$$

mit $a_{j,k} \in C^1(\Omega)$, $a_0 \in C(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie: $\tilde{L}\tilde{u} = \tilde{f}$ im schwachen Sinne, wobei

$$\tilde{L}v = -\sum_{j,k \in \{1,\dots,n\}} (\tilde{a}_{j,k} v_{y_j})_{y_k} + \tilde{a}_0 v$$

mit $\tilde{a}_0 = a_0 \circ \Psi$, $\tilde{f} = f \circ \Psi$ und

$$\tilde{a}_{j,k}(y) = \sum_{r,s \in \{1,\dots,n\}} a_{r,s}(\Psi(y)) \left((D\Psi(y))^{-1}\right)_{j,r} \left((D\Psi(y))^{-1}\right)_{k,s}$$

Hinweis: Transformationsformel für Integrale.

(5 Punkte)

Aufgabe 2: (Alternativer Existenzbeweis für elliptische Gleichungen)
Für $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ sei

$$Q(u,v) := \int_\Omega \left(\sum_{j,k} \frac{1}{2} a_{j,k}(x) D_j u(x) D_k v(x) + \frac{1}{2} a_0(x) u(x) v(x) \right) dx,$$

$$G(v) := \int_\Omega fv \quad ,$$

mit $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $a_{j,k} = a_{k,j} \in L^\infty(\Omega)$.

(a) Zeigen Sie:

$$Q\left(\frac{u-v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = \frac{1}{2}F(u) + \frac{1}{2}F(v) - F\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

mit $F(u) := Q(u,u) - G(u)$.

Hinweis: Benutzen Sie, dass G linear und Q bilinear ist.

(b) Zeigen Sie: Gibt es $c > 0$ mit $Q(u,u) \geq c\|u\|^2_{W^{1,2}}$ für alle $u \in W^{1,2}_0(\Omega)$ (dann auch $I := \inf_{v \in W^{1,2}_0(\Omega)} F(v) > -\infty$) und ist $(u_n)_n$ eine Folge in $W^{1,2}_0(\Omega)$ mit

$$F(u_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} I$$

so ist $(u_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $W^{1,2}_0(\Omega)$.

Bemerkung: Als Konsequenz von (b) hat die Minimalfolge $(u_n)_n$ einen Limes u^* in $W_0^{1,2}(\Omega)$, der dann ein Minimierer von F ist und damit schwache Lösung von $-\sum\limits_{j,k} \partial_k(a_{j,k}\partial_j u) + a_0 u = f$.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Auf $\Omega := \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \mid 0 < r < 1 \text{ und } 0 < \varphi < \frac{5}{4}\pi\right\}$ betrachten wir das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) := \tilde{u}(r,\varphi) := r^{\frac{4}{5}} \sin(\tfrac{4}{5}\varphi)$$

harmonisch ist. Für welches g erfüllt u das Randwertproblem (1)?

(b) Zeigen Sie für dieses u: $u \in W^{1,2}(\Omega)$, aber $u \notin W^{2,2}(\Omega)$.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Wir betrachten weiterhin (1). Falls eine Funktion $h \in W^{2,2}(\Omega)$ existiert, für die $h = g$ auf $\partial\Omega$ gilt (aus dem Sobolevschen Einbettungssatz folgt $h \in C(\bar{\Omega})$), dann kann die Inhomogenität in der Randbedingung des Problems (1) in eine Inhomogenität in der Gleichung eines neuen Problems

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

überführt werden, wobei $v = u - h$ und $f = \Delta h$ gesetzt wird.
Für g aus Aufgabe 3(a) kann man z.B. wählen:

$$h(r\cos\varphi, r\sin\varphi) := \tilde{h}(r,\varphi) := e^{1-\frac{1}{r^2}} \sin\left(\tfrac{4}{5}\varphi\right)$$

Zeigen Sie für dieses h sowie u und g aus Aufgabe 3(a):

(a) $h \in W^{2,2}(\Omega)$ (und folglich $f = \Delta h \in L^2(\Omega)$),

(b) $v \notin W^{2,2}(\Omega)$.

(c) Warum ist Satz 5 ($W^{2,2}$-Regularität am Rande) aus der Vorlesung in diesem Fall nicht anwendbar?

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
`http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1212SS/PDE.html`