Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2012**
Dipl.-Math. F. Krügel

Partielle Differentialgleichungen

11. Übung

Abgabe: Montag, 25.06.2012, bis 12:00 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
Wir betrachten auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ die Gleichung

$$-\Delta u + \partial_{x_1} u = f \tag{1}$$

mit $f \in L^2(\Omega)$. Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ schwache Lösung von (1). Zeigen Sie: $u \in W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$, und es gibt für alle $U \subset\subset \Omega$ eine Konstante C (unabhängig von u und f) so dass für alle schwachen Lösungen u gilt:

$$\|u\|_{W^{2,2}(U)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

Hinweis: Betrachten Sie $\tilde{f} := f - \partial_{x_1} u$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:
Für $-\infty < a < b < \infty$ betrachten wir den reellen Hilbertraum $L^2((a,b))$. Eine Folge $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2((a,b))$ heißt *vollständiges Orthonormalsystem*, falls

(i) $\langle e_k, e_j \rangle := \int_a^b e_k(x) e_j(x) dx = \delta_{kj}$ für $k, j \in \mathbb{N}$

(ii) Für alle $f \in L^2((a,b))$ gibt es eine Folge reeller Zahlen (γ_k) so dass:

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k e_k =: \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k$$

(Konvergenz in $L^2((a,b))$, d.h. $\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k e_k \right\|_{L^2} \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$)

Zeigen Sie:

(a) (Stetigkeit des Skalarprodukts) Für konvergente Folgen (h_n), (g_n) in $L^2((a,b))$ mit $h_n \to h,\ g_n \to g$ gilt $\langle h_n, g_n \rangle \to \langle h, g \rangle$ in $\mathbb{R}$

(b) Sind (i) und (ii) erfüllt, gilt $\gamma_k = \langle f, e_k \rangle\ \forall k \in \mathbb{N}$.

(c) (Parsevalsche Gleichung)

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle^2$$

Wo wird (a) im Beweis von (b) und (c) benötigt?
Ein Beispiel für ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2((0,\pi))$ ist

$$e_k(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx),\ \ k \in \mathbb{N}\quad . \quad \text{(Ohne Beweis)}$$

(d) Zeigen Sie, dass

$$\sin(kx) \rightharpoonup 0 \ \text{ für } k \to \infty \text{ in } L^2((0,\pi))$$

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u'' = x & \text{in } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

(a) Sei $V_{1/4} = \{v \in C([0,1]) \mid v(0) = v(1) = 0 \text{ und } v \text{ ist linear auf } [\frac{k-1}{4}, \frac{k}{4}],\ k = 1,2,3,4\}$. Finden Sie die Näherungslösung $u_{1/4} \in V_{1/4}$ von (2) mit der Methode der finiten Elemente.

(b) Lösen Sie (2) explizit und zeichnen Sie den Graphen dieser Lösung und den von $u_{1/4}$ in einem Bild.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei Ω ein beschränktes polygonales Gebiet in $\mathbb{R}^N$, τ_h eine Triangulierung von Ω und $V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) \mid v|_K \text{ ist linear } \forall\ K \in \tau_h\}$. Zeigen Sie, dass $V_h \subset W^{1,2}(\Omega)$ gilt.

(5 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

`http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1212SS/PDE.html`