Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2012**
Dipl.-Math. F. Krügel

Partielle Differentialgleichungen
12. Übung

Abgabe: Montag, 02.07.2012, bis 12:00 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Keller des MI)

Aufgabe 1:
In der Vorlesung (Satz 8) wurde im Wesentlichen folgende Aussage gezeigt:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend, und L ein elliptischer Operator der Form

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + a_0 u$$

mit auf $\overline{\Omega}$ stetigen Koeffizienten $a_{i,j}$, b_i und a_0; $a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x)$, $\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$ mit $\theta > 0$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Dann gilt:
Ist $Lu \leq 0$ in Ω, $a_0 \geq 0$ und $u(x_0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \geq 0$ für ein $x_0 \in \Omega$, so ist $u(x) = u(x_0)$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass man auf die Voraussetzung $a_0 \geq 0$ nicht verzichten kann.

(b) Seien die Voraussetzungen bis auf $a_0 \geq 0$ erfüllt und sei $u \leq 0$. Zeigen Sie: Ist $Lu \leq 0$ in Ω, $u(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in \Omega$, so ist $u(x) = 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$. **Hinweis:** $a_0(x) = \max\{0, a_0(x)\} + \min\{0, a_0(x)\}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend, und $a_{i,j}$ und a_0 auf $\overline{\Omega}$ stetig; $a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x)$, $\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$ mit $\theta > 0$; $\Omega_T := \Omega \times (0,T)$, $\Gamma_T := (\Omega \times \{t = 0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T])$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ mit

$$u_t(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) u_{x_i x_j}(x,t) + a_0(x)u(x,t) > 0,\ (x,t) \in \Omega_T$$

$$u(x,t) \geq 0,\ (x,t) \in \Gamma_T$$

Dann ist $u > 0$ in $\Omega \times (0,T]$.

(a) Zeigen Sie, dass für symmetrische Matrizen $A, H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: Ist A positiv definit und H positiv semidefinit, dann gilt Spur $(AH) \geq 0$.

(b) Beweisen Sie das oben formulierte Maximumprinzip unter der zusätzlichen Annahme, dass $a_0(x) \geq 0$ auf $\overline{\Omega}$ ist.

(c) Beweisen Sie dieses Maximumprinzip ohne Annahmen über das Vorzeichen von a_0.
Hinweis: Substituieren Sie $u = e^{\lambda t} v$.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexes, beschränktes, glatt berandetes Gebiet mit $0 \in \Omega$. Für die äußere Normale $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ und für alle $x \in \partial\Omega$ gilt dann $x \cdot \nu(x) > 0$. Beweisen Sie folgende Aussage: Falls $n > 2$, $\lambda > 0$ und $q \geq \frac{n+2}{n-2}$ ist, so kann das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^q & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

keine nichttriviale Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ besitzen. Anleitung: Angenommen, u ist nichttriviale Lösung.

(a) Zeigen Sie, dass $u > 0$ in Ω gelten muss.

(b) Zeigen Sie für $x \in \partial\Omega$: $(x \cdot \nabla u(x))(\nabla u(x) \cdot \nu(x)) = (x \cdot \nu(x))|\nabla u(x)|^2$

(c) Multiplizieren Sie die Differentialgleichung mit u und integrieren Sie.

(d) Wenden Sie den Gaußschen Satz $\int_\Omega \mathrm{div} F = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu dS$ auf $F(x) = (x \cdot \nabla u(x))\nabla u(x)$ an.

(8 Punkte)

Aktuelle Informationen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
`http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1212SS/PDE.html`