Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer

WS 2012/2013

Variationsungleichungen

1. Übung

Abgabe: Freitag, 12.10.2013, bis 12:15 Uhr
(in den Briefkasten für Übungsblätter im "MI-Container" auf dem Parkplatz der Physik)

Aufgabe 1:
Eine Teilmenge C eines reellen Vektorraums ist *konvex*, wenn für alle $t \in [0,1]$ und alle $x, y \in C$ auch $tx + (1-t)y \in C$ gilt. Im Folgenden sei C nun eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Vektorraums. Zeigen oder widerlegen Sie: C ist bereits konvex, wenn die Konvexititätsbedingung für $t = \frac{1}{2}$ gilt, also wenn $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in C$ für alle $x, y \in C$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Wir betrachten eine konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, die mindestens einen endlichen Wert annimmt. Dabei heisst die Funktion f konvex, wenn ihr *Epigraph* $\big\{(x,\lambda) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid \lambda \geq f(x)\big\}$ eine konvexe Menge in $\mathbb{R}^{N+1}$ ist, oder, äquivalent, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$ und $t \in [0,1]$ gilt, dass

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y).$$

Einen Vektor $x^* \in \mathbb{R}^N$ bezeichnet man als *Subgradient* von f bei $x \in \mathbb{R}^N$, falls

$$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x\rangle \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^N,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt ist. Im Allgemeinen sind Subgradienten nicht eindeutig (insbesondere, wenn f einen "Knick" hat), und man definiert

$$\partial f(x) := \{x^* \mid x^* \text{ ist Subgradient zu } f \text{ bei } x\}.$$

Die mengenwertige Abbildung $\partial f : x \mapsto \partial f(x)$ heisst *Subdifferential* von f. Zeigen Sie für alle konvexen Funktionen $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mit $f \not\equiv +\infty$:

(a) f wird bei x minimal $\iff$ $0 \in \partial f(x)$.

(b) ∂f ist *monoton* in folgendem Sinne:

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle \geq 0 \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N,\ x_1^* \in \partial f(x_1),\ x_2^* \in \partial f(x_2).$$

(5 Punkte)

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1213WS/varungl.html

Dort können Sie sich auch im Zeitraum **vom 8.10.2011 bis zum 11.10.2011 online für die Übung anmelden**.