Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer **WS 2012/2013**

Variationsungleichungen

3. Übung

Abgabe: Freitag, 26.10.2013, bis 12:15 Uhr
(in den Briefkasten für Übungsblätter im "MI-Container" auf dem Parkplatz der Physik)

Aufgabe 1:
Sei $a : (u, v) \mapsto a(u, v)$ eine (nicht notwendig symmetrische) koerzive Bilinearform auf einem reellen Hilbertraum H. Ferner seien a_0 der symmetrische und b der antisymmetrische Anteil von a, also

$$a_0(u, v) := \frac{1}{2}a(u, v) + \frac{1}{2}a(v, u), \quad b(u, v) := \frac{1}{2}a(u, v) - \frac{1}{2}a(v, u).$$

Zeigen Sie, dass dann für alle $t \in \mathbb{R}$

$$a_t(u, v) := a_0(u, v) + tb(u, v)$$

koerziv ist, mit der gleichen Koerzivitätskonstante wie a.

(5 Punkte)

Aufgabe 2: (schwache Ableitungen)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Im Folgenden ist $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ die Menge der messbaren Funktionen $v : \Omega \to \mathbb{R}$, die *lokal integrierbar* sind, d.h. $\int_K |v| < \infty$ für alle kompakten Teilmengen K von Ω. Eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ist nach nach x_i *schwach differenzierbar*, wenn es ein $v_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ gibt, so dass

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega v_i(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

gilt, wobei ∂_i die klassische partielle Ableitung nach der i-ten Koordinate ist. In diesem Fall nennt man $\partial_i^w u := v_i$ die *schwache Ableitung* von u nach x_i. (Diese ist eindeutig bestimmt, was Sie unten ohne Beweis verwenden dürfen.) Für $p \in [1, \infty)$ definiert man nun

$$W^{1,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega) \mid v \text{ ist schwach differenzierbar mit } \partial_i v \in L^p(\Omega),\ i = 1, \ldots, N\},$$

wobei $L^p(\Omega)$ die Menge der messbaren Funktionen $v : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\int_\Omega |v|^p < \infty$ ist.

(a) Zeigen Sie: Ist $u \in C^1(\Omega)$, so ist u nach jeder Koordinate x_i schwach differenzierbar, und $\partial_i^w u(x) = \partial_i u(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. Die schwache Ableitung verallgemeinert also die klassische Ableitung, weshlab in der Regel das gleiche Symbol ∂_i für beide verwendet wird.

(b) Wir betrachten nun konkret die Funktion

$$f_\alpha(x) := \frac{1}{|x|^\alpha}, \quad x \in \Omega, \text{ mit Parameter } \alpha > 0, \quad \text{wobei } |x| := \left(x_1^2 + \ldots + x_N^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

auf der Einheitkugel $\Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a):

$$f_\alpha \text{ ist schwach differenzierbar in } \Omega \quad \Longrightarrow \quad \partial_i^w\alpha(x) = -\alpha\frac{x_i}{|x|^{\alpha+2}} \quad \text{für f.a. } x \in \Omega.$$

(c) Zeigen Sie, dass f_α genau dann eine schwache Ableitung nach x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) besitzt, wenn $\alpha < N - 1$.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $C \subset \mathbb{R}^N$ offen und konvex, und $f : C \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zur Erinnerung: Wir bezeichnen f als konvex, wenn

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) \quad \text{für alle } x, y \in C \text{ und alle } t \in [0,1],$$

und als strikt konvex, wenn Gleichheit oben nur für $x = y$ oder $t \in \{0, 1\}$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Ist $f \in C^1(C)$, gilt

$$f \text{ konvex} \quad \Longleftrightarrow \quad f(y) \ge f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \quad \text{für alle } x, y \in C$$

(b) Ist $f \in C^2(C)$ konvex, so ist die Hessematrix $D^2 f(x)$ nichtnegativ definit, für alle $x \in C$.

(c) Sei f nun strikt konvex. Gilt dann die strikte Ungleichung in (a) für $y \neq x$? Und ist $D^2 f(x)$ in (b) dann positiv definit?

(5 Punkte)

Aufgabe 4: (Glättung durch Faltung, Teil 1)
Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $\eta \in C^0(\mathbb{R}^N)$ eine Funktion mit

$$\eta(x) = 0 \quad \text{für alle } |x| \ge 1.$$

Für $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ definiert man die Faltung $u * \eta$ durch

$$(u * \eta)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)\eta(y)\, dy.$$

Zeigen Sie:

(a) $(u * \eta)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\eta(x-y)\, dy = (\eta * u)(x)$.

(b) $u * \eta \in C^0(\mathbb{R}^N)$.

(c) $\eta \in C^k(\mathbb{R}^N) \quad \Longrightarrow \quad u * \eta \in C^k(\mathbb{R}^N)$ und $D^j(u * \eta) = u * (D^j \eta)$ für $1 \le j \le k$.

(5 Punkte)

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1213WS/varungl.html