Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer **WS 2012/2013**

Variationsungleichungen

4. Übung

Abgabe: Freitag, 02.11.2013, bis 12:15 Uhr
(in den Briefkasten für Übungsblätter im "MI-Container" auf dem Parkplatz der Physik)

Aufgabe 1: (Glättung durch Faltung, Teil 2)
Es sei $\eta \in C(\mathbb{R}^N)$ eine Funktion mit

$$\eta \geq 0, \quad \eta(x) = 0 \text{ für alle } |x| \geq 1 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \eta(x)\, dx = 1.$$

Zeigen Sie für $1 \leq p < \infty$ und $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$:

(a) $|(\eta * u)(x)|^p \leq (\eta * (|u|^p))(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^N$.
Hinweis: Höldersche Ungleichung.

(b) Die reskalierte Funktion $\eta_m(x) := m^N \eta(mx)$ erfüllt $\int_{\mathbb{R}^N} \eta_m(x)\, dx = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$, und $\eta_m(x) = 0$ für alle $|x| \geq \frac{1}{m}$.

(c) Ist $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger, so gilt $u * \eta_m \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$; genauer gesagt haben wir folgendes:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u * \eta_m - u|^p \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y) - u(x)|^p \, \eta_m(y)\, dy\, dx \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 2: (zur Approximation messbarer Funktionen)
Es sei $A \subset \mathbb{R}^N$ eine Lebesgue-messbare Menge mit endlichem Maß. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge U und eine kompakte Menge K mit $K \subset A \subset U \subset \mathbb{R}^N$, so dass

$$\mu(A \setminus K) < \varepsilon \quad \text{und} \quad \mu(U \setminus A) < \varepsilon,$$

wobei μ das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^N$ ist. Benutzen Sie diese maßtheoretische Tatsache, um folgendes zu zeigen:

Zu jedem $\delta > 0$ gibt es eine Funktion $u \in C(\mathbb{R}^N)$ mit kompaktem Träger, so dass

$$0 \leq u \leq 1 \text{ in } \mathbb{R}^N \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u(x) - \mathbb{1}_A(x)|\, dx \leq \delta,$$

wobei $\mathbb{1}_A$ die *charakteristische Funktion* von A ist, d.h.,

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Hinweis: Sei B, $K \subset B \subset U$, die Menge der Punkte in U, deren Abstand zu K kleiner ist als $\frac{d}{2}$, wobei $d > 0$ der minimale Abstand von K zu ∂U ist. Glättet man nun $\mathbb{1}_B$ durch Faltung mit η_m (die Funktion aus Aufgabe 1), erhält man einen Kandidaten für u, mit $u = 1$ in K und $u = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus U$, sofern ε (und damit K, U, B) sowie m in Abhängigkeit von δ geeignet gewählt werden.
(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt mit glattem Rand (C^1 genügt). Zeigen Sie:

(a) Aus dem Satz von Gauß folgt: Für alle $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$, $\Phi \in C^1(\bar{\Omega};\mathbb{R}^N)$ gilt

$$\int_\Omega (\nabla\psi)\cdot\Phi + \psi \operatorname{div}\Phi \, dx = \int_{\partial\Omega} \psi\Phi\cdot n \, d\sigma,$$

wobei $\cdot$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^N$, $\int_{\partial\Omega} \dots d\sigma$ das Flächenintegral und $n = n(x)$ der äußere Normalenvektor zu $\partial\Omega$ an der Stelle $x \in \partial\Omega$ ist.

(b) Existiert eine Lösung $u \in C^2(\bar{\Omega})$ von

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

mit einem $f \in C(\bar{\Omega})$ und einem $g \in C(\partial\Omega)$, so gilt

$$\int_\Omega f \, dx = \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma.$$

(c) Für alle $\psi \in H_0^{1,2}(\Omega)$ und alle $\Phi \in H^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ (d.h. Φ ist eine Abbildung mit Werten in $\mathbb{R}^N$, und jede der N Komponenten von Φ ist eine Funktion in $H^{1,2}(\Omega)$) gilt

$$\int_\Omega (\nabla\psi)\cdot\Phi + \psi \operatorname{div}\Phi \, dx = 0.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt mit glattem Rand, und $f \in L^2(\Omega)$. Wir betrachten die Bilinearform

$$a(u,v) := \int_\Omega \left(u_{x_1}v_{x_1} - u_{x_1}v_{x_2} - u_{x_2}v_{x_1} + 3u_{x_2}v_{x_2}\right) dx, \quad u,v \in H_0^1(\Omega),$$

und die Variationsungleichung

$$a(u, v-u) \geq \int_\Omega (fv - fu)\, dx \quad \text{für alle } v \in K := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \;\middle|\; \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Variationsungleichung hat genau eine Lösung $u \in K$.

(b) Existiert eine Konstante $\lambda \geq 0$ und eine Lösung $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ von

$$-w_{x_1x_1} + 2w_{x_1x_2} - 3w_{x_2x_2} + \lambda w = f \quad \text{f.ü. in } \Omega$$

mit $\|w\|_{L^2(\Omega)} = 1$, so ist w eine Lösung der Variationsungleichung. Insbesondere folgt $u = w$.

(5 Punkte)

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1213WS/varungl.html