

Variationsungleichungen

5. Übung

Abgabe: Freitag, 09.11.2013, bis 12:15 Uhr

(in den Briefkasten für Übungsblätter im "MI-Container" auf dem Parkplatz der Physik)

Aufgabe 1: (Glättung durch Faltung, Teil 3)

Es sei $1 \leq p < \infty$, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ eine Funktion mit

$$\eta \geq 0, \quad \eta(x) = 0 \quad \text{für alle } |x| \geq 1 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \eta(x) dx = 1.$$

Ferner sei $\eta_m(x) := m^N \eta(mx)$.

(a) Zeigen Sie, dass $u * \eta_m \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N)$, mit $\partial_i(u * \eta_m) = (\partial_i u) * \eta_m$, $i = 1, \dots, N$.

(b) Mit Hilfe der Resultate der Aufgaben 1 und 2 von Blatt 4 kann man sich überlegen, dass

$$\|v * \eta_m - v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für alle } v \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

Folgern Sie daraus, dass

$$\|u * \eta_m - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

$$\text{wobei } \|w\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |w|^p dx + \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i w|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei $\Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$. Für $N \geq 2$ gilt die auf den ersten Blick verwunderliche Ungleichung

$$-1 \geq 0 \quad \text{auf } E := \{0\} \text{ im Sinne von } H^1(\Omega).$$

Zeigen Sie dies für $N \geq 3$, mit Hilfe der Funktionenfolge

$$u_n(x) := \min\{0, -1 + |nx|^{-\alpha}\}$$

mit einem geeigneten $\alpha > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass u_n für $\alpha < N - 1$ schwach differenzierbar ist (vgl. Aufgabe 2 auf Blatt 3), mit

$$\partial_i u_n(x) = \begin{cases} -\alpha n^{-\alpha} \frac{x_i}{|x|^{\alpha+2}} & \text{für } |nx|^{-\alpha} < 1, \\ 0 & \text{für } |nx|^{-\alpha} > 1. \end{cases}$$

Wann gilt $u_n \rightarrow -1$ in $H^1(B_1(0)) = W^{1,2}(B_1(0))$?

(5 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $f \in L^2(\Omega)$ und $\psi \in H^1(\Omega)$. Wir betrachten die Variationsungleichung

$$\int_{\Omega} u_{x_i}(v-u)_{x_i} dx \geq \int_{\Omega} f(v-u) dx \quad \text{für alle } v \in K := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq \psi \text{ in } \Omega\}. \quad (1)$$

Sei nun $u \in H^2(\Omega) \cap K$. Zeigen Sie, dass u genau dann Lösung von (1) ist, wenn

$$-\Delta u - f \geq 0, \quad u - \psi \geq 0, \quad \text{und} \quad -(\Delta u + f)(u - \psi) = 0 \quad \text{f.ü. in } \Omega. \quad (2)$$

Hinweis zu „ $\Rightarrow$ “: Verwenden Sie folgende Variante des Fundamentallemmas der Variationsrechnung: Für jedes $w \in L^2(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} w \varphi dx \geq 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0 \text{ in } \Omega \quad \implies \quad w \geq 0 \text{ f.ü. in } \Omega.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, und $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ mit $\varphi^1 \geq \varphi^2$ in Ω , wobei $H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) := \{v = (v^1, v^2) \mid v^1, v^2 \in H^1(\Omega)\}$ Hilbertraum bezüglich des Skalarprodukts $(u, v) := (u^1, v^1)_{H^1(\Omega)} + (u^2, v^2)_{H^1(\Omega)}$ ist. Ferner sei

$$K := \{v = (v^1, v^2) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \mid v^1 \geq v^2 \text{ in } \Omega, v = \varphi \text{ auf } \partial\Omega\},$$

$f_1, f_2 \in H^{-1}(\Omega)$ und

$$a(v, w) := \int_{\Omega} (v_{x_i}^1 w_{x_i}^1 + v_{x_i}^2 w_{x_i}^2) dx + \int_{\Omega} (\lambda v^1 w^1 + \mu v^2 w^2) dx,$$

mit Parametern $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Weisen Sie unter geeigneten Voraussetzungen an λ und μ die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $u \in K$ folgender Variationsungleichung nach:

$$a(u, v - u) \geq \langle f_1, v^1 - u^1 \rangle + \langle f_2, v^2 - u^2 \rangle \quad \text{für alle } v \in K.$$

(5 Punkte)

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

<http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1213WS/varungl.html>