Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer

WS 2012/2013

Variationsungleichungen

6. Übung

Abgabe: Freitag, 16.11.2013, bis 12:15 Uhr
(in den Briefkasten für Übungsblätter im "MI-Container" auf dem Parkplatz der Physik)

Aufgabe 1:
Es sei $B_r \subset \mathbb{R}^N$ die offene Kugel um den Ursprung mit Radius $r > 0$, und $1 \leq s < \infty$. Zeigen Sie, dass eine nur von N und s abhängige Konstante C existiert, so dass

$$\|v\|_{L^s(B_r)} \leq Cr \|\nabla v\|_{L^s(B_r)} \quad \text{für alle } v \in H^{1,s}(B_r) \text{ mit } \int_{B_r} v \, dx = 0.$$

Hinweis: Führen Sie zunächst eine Widerspruchsbeweis für $r = 1$, mit Hilfe des folgenden Kompaktheitsresulats (Rellich): Ist $(v_n) \subset H^{1,s}(B_1)$ eine beschränkte Folge, so gibt es eine Teilfolge $(v_{k(n)})$ und eine Funktion $v \in L^s(B_1)$, mit $v_{k(n)} \to v$ in $L^s(B_1)$.
(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes konvexes Gebiet, und

$$K := \{u \in H_0^{1,\infty}(\Omega) \mid u \leq 1 \text{ in } \Omega,\, u \text{ konkav}\}.$$

Angenommen, das Funktional

$$J(v) := \int_\Omega \frac{1}{1 + |\nabla v|^2} \, dx$$

hat auf K einen Minimierer u.

(a) Wie lautet die entsprechende Variationsungleichung für u?

(b) Falls u hinreichend glatt ist und im Inneren von K liegt, wie lautet dann die partielle Differentialgleichung für u?

(c) Bestimmen Sie im Fall $N = 1$ alle glatten Lösungen dieser (nun gewöhnlichen) Differentialgleichung. Liegen diese im Inneren von K?

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $f \in L^2(\Omega)$, $\psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, und

$$K := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq \psi\}.$$

Ferner sei $u \in K$ die Lösung der Variationsungleichung

$$\int_\Omega u_{x_i}(v-u)_{x_i}\,dx \geq \int_\Omega f(v-u)\,dx \quad \text{für alle } v \in K.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $-\Delta\psi \geq f$, so gilt $u = \psi$.

(b) Sei nun $-\Delta\psi < f$ in Ω. Zusätzlich nehmen wir an, dass ein $\eta \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ existiert mit $-\Delta\psi \leq -\Delta\eta \leq f$ in Ω und $\psi < \eta$ in Ω. Dann gilt $u > \psi$ in Ω.

Bemerkung: Für hinreichend glattes f und ψ ist die Zusatzannahme in (b) immer gegeben. Die schwache Lösung $\eta \in H_0^1(\Omega)$ von $-\Delta\eta = f$ ist dann nämlich ebenfalls glatt, und $\psi < \eta$ folgt aus dem starken Maximumsprinzip.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei $I = (-1,1) \subset \mathbb{R}$, $\psi(x) := 1 - |x|$, und $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Aus den Resultaten der Vorlesung folgt, dass die Variationsungleichung

$$\int_I u'(v-u)'\,dx \geq \int_I \alpha(v-u)\,dx \quad \text{für alle } v \in K := \{v \in H_0^1(I) \mid v \geq \psi\}.$$

genau eine Lösung $u \in K$ hat. Zeigen Sie:

(a) Für $2 < \alpha$ ist $u(x) = \frac{\alpha}{2}(1-x)(1+x)$.

(b) Für $0 < \alpha \leq 2$ ist $u(x) = 1 - |x| + \frac{\alpha}{2}(1-|x|)\,|x|$.

(c) Für $\alpha \leq 0$ ist $u(x) = 1 - |x|$.

Verwenden Sie hier ohne Beweis: $w \in H^1(I) \cap C(\bar{I})$ und $w = 0$ auf $\partial I \Longrightarrow w \in H_0^1(I)$.

(5 Punkte)

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1213WS/varungl.html