Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer

WS 2012/2013

Variationsungleichungen

8. Übung

Abgabe: Freitag, 30.11.2013, bis 12:15 Uhr
(in den Briefkasten für Übungsblätter im "MI-Container" auf dem Parkplatz der Physik)

Aufgabe 1:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen monoton sind. Sind sie sogar strikt monoton?

(a) $A_1 : \mathbb{R}^N \to (\mathbb{R}^N)'$, $\langle A_1(y), z\rangle := (1 + |y|^2)^{-\frac{1}{2}} y \cdot z$;

(b) $A_2 : W^{1,1}(\Omega) \to (W^{1,1}(\Omega))'$, $\langle A_2(u), \varphi\rangle := \int_\Omega (1 + |\nabla u|^2)^{-\frac{1}{2}} \nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx$;

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Es sei $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Wir betrachten die Variationsungleichung

$$u \in H_0^1(\Omega) : \quad \langle A(u), v - u\rangle := \int_{-1}^{1} x^2 (u' + 1)(v - u)' \, dx \geq 0 \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \tag{1}$$

Zeigen Sie:

(a) $A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ ist Lipschitz-stetig:

$$\|A(v) - A(w)\|_{H^{-1}} := \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1} \leq 1} \langle A(v) - A(w), \varphi\rangle \leq C \|v - w\|_{H^1}.$$

(b) A ist strikt monoton.

(c) (1) hat keine Lösung.
Hinweis: Jede Lösung u müsste $x^2(u'(x) + 1) = C$ mit einer Konstante $C \in \mathbb{R}$ erfüllen.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Es sei X ein reflexiver Banachraum, $K \subset X$ abgeschlossen und konvex, und $A : K \to X'$ monoton und stetig auf endlichdimensionalen Unterräumen. Zeigen Sie, dass die Variationsungleichung

$$\langle Au, v - u \rangle \geq 0 \quad \text{für aller } v \in K \tag{2}$$

genau dann eine Lösung $u \in K$ hat, wenn ein $R > 0$ existiert, so dass $\|u_R\| < R$ gilt, für eine Lösung $u_R \in K_R$ von

$$\langle Au_R, v - u_R \rangle \geq 0 \quad \text{für aller } v \in K_R, \text{ wobei } \; K_R := K \cap \{v : \|v\| \leq R\}. \tag{3}$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei X ein topologischer Raum, $K \subset X$ kompakt, und $\{U_i \mid i \in I\}$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen von K, wobei I eine Indexmenge ist (womöglich überabzählbar). Ferner sei $\bigcap_{i \in J} U_i \neq \emptyset$ für jede endliche Teilmenge J von I. Zeigen Sie, dass dann $\bigcap_{i \in I} U_i \neq \emptyset$.
Hinweis: Widerspruchsbeweis. Wenn $\bigcap_{i \in I} U_i = \emptyset$, was kann man dann über die Mengen $V_i := X \setminus U_i$ sagen?
Bemerkung: Sollten Sie mit dem Begriff des topologischen Raums nicht vertraut sein, nehmen Sie stattdessen an, dass X ein metrischer oder normierter Raum ist. Dies ändert nichts Wesentliches.
(5 Punkte)

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1213WS/varungl.html