Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer

WS 2012/2013

Variationsungleichungen

9. Übung

Abgabe: Freitag, 7.12.2012, bis 12:15 Uhr
(in den Briefkasten für Übungsblätter im “MI-Container” auf dem Parkplatz der Physik)

Aufgabe 1:
Es sei $N \geq 3$ und σ_N die Oberfläche der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^N$. Wir betrachten einen Spezialfall des Funktionals aus Aufgabe 3 von Blatt 7, eingeschränkt auf radialsymmetrische, radial fallend Funktionen:

$$J(u) := \sigma_N \int_0^R \left(|u'|^2 - u' - au \right) r^{N-1} dr, \quad u \in K_R.$$

mit gegebenem $a > 0$ (konstant). Dabei ist K_R die Menge der Funktionen $v : (0, R] \to \mathbb{R}$, die stetig auf $(0, R]$ sind mit $v(R) = 0$, sowie schwach differenzierbar auf $(0, R)$, mit schwacher Ableitung $v' \leq 0$, und $\|v\|^2 := \sigma_N \int_0^R \big(v(r)^2 + v'(r)^2\big) r^{N-1}\, dr < \infty$.

(a) Wie sieht die Variationsungleichung für einen Minimierer $u \in K$ von J aus?

(b) Angenommen, es gibt ein $r_0 > 0$ und einen Minimierer $u \in C^1([0, R])$ mit $u' = 0$ auf $[0, r_0]$ und $u' < 0$ auf (r_0, R). Bestimmen Sie u und r_0 explizit. Welche Differentialgleichung erfüllt u für $r > r_0$?

(c) Sei nun $S \geq 0$ die größtmögliche Konstante, so dass

$$\int_0^S -w'(r) r^{N-1}\, dr \geq a \int_0^S w(r) r^{N-1}\, dr \quad \text{für alle } w \in K_S$$

Zeigen Sie: Ist $S \geq R$, so ist $u = 0$ der einzige Minimierer.

Bemerkung: Über $w(x) := v(|x|)$, $x \in B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$, erhält man aus den Funktionen $v \in K$ alle radialsysmetrischen, radial fallenden Funktionen $w \in H_0^1(B_R(0))$, und $\|w\|_{H^1(B_R(0))} = \|v\|$. Für $a = 1$ ist die Konstante S oben diejenige Zahl, für die Volumen und Oberfläche der Kugel mit Radius S im $\mathbb{R}^N$ übereinstimmen: $S = N$; im Allgemeinen $S = \frac{N}{a}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Es sei $\Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$, und

$$K := \{v \in H^1(\Omega) \mid v \geq 0 \text{ auf } \partial\Omega\},$$

was eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge von $H^1(\Omega)$ ist. Ferner sei $f_0 \in L^2(\Omega)$ mit $\int_\Omega f_0\, dx < 0$. Zeigen Sie, dass die Variationsungleichung

$$\int_\Omega u_{x_i} (v - u)_{x_i}\, dx \;\geq\; \int_\Omega f_0 (v - u)\, dx \quad \text{für alle } v \in K.$$

eine Lösung $u \in K$ besitzt.

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Wir betrachten das Hindernisproblem

$$\text{Minimiere für } v \in K\colon \quad \int_\Omega |\nabla v|^2\,, \quad \text{mit } K := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq \psi \ \text{ in } \Omega\}.$$

Hierbei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, das sternförmig bezüglich des Ursprungs ist (insbesondere $0 \in \Omega$), und $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$ mit $\psi \leq 0$ auf $\partial\Omega$, $\psi(0) > 0$ und $x \cdot \nabla\psi(x) \leq 0$ für alle $x \in \Omega$. Sei nun $u \in K$ eine Lösung (Minimierer) des Hindernisproblems mit $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Zeigen Sie:

(a) $x \cdot \nabla v(x) \leq 0$ für alle $v \in K \cap C^1(\bar{\Omega})$ mit $v \geq 0$ in Ω.

(b) $u \geq 0$ in Ω.
Hinweis: Die Lösung des Hindernisproblems ist eindeutig.

(c) Ist $u(x_0) = \psi(x_0)$ für ein $x_0 \in \Omega$, so gilt auch $\nabla u(x_0) = \nabla\psi(x_0)$.

(d) $x \cdot \nabla u(x) \leq 0$ für alle $x \in \Omega$.
Hinweis: Da sowohl u als auch ψ in $C(\bar{\Omega})$ liegen, besteht die Nichtkoinzidenzmenge „$\{u > \psi\}$“ aus allen x, für die $u(x) > \psi(x)$ im gewöhnlichen Sinne gilt, und ihr Komplement ist damit tatsächlich (und nicht nur formal) $I = \{x \mid u(x) = \psi(x)\}$. Welche Differentialgleichung erfüllt u in $\{u > \psi\}$, und was folgt daraus für $\Delta(x \cdot \nabla u)$? Sie können hier annehmen, dass u in $\{u > \psi\}$ beliebig oft differenzierbar ist.

(e) Wo nimmt u sein Maximum an? Was kann man über die Gestalt der Mengen $\{x|u(x) \geq c\}$, $c > 0$, sagen?

(2+2+1+3+2=10 Punkte)

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1213WS/varungl.html