

Variationsungleichungen

10. Übung

Abgabe: Freitag, 14.12.2012, bis 12:15 Uhr

(in den Briefkasten für Übungsblätter im “MI-Container” auf dem Parkplatz der Physik)

Aufgabe 1:

Es sei H ein Hilbertraum und $a(u, v)$ eine stetige nichtnegative Bilinearform auf H . Zeigen Sie, dass $u \mapsto a(u, u)$ unterhalbstetig bezüglich der schwachen Konvergenz in H ist, also dass für alle Folgen $(u_n) \subset H$ folgendes gilt:

$$u_n \rightharpoonup u \quad \Longrightarrow \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a(u_n, u_n) \geq a(u, u)$$

(5 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Dann gilt folgende *elliptische a-priori Abschätzung*:

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right), \quad \text{für alle } u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

mit einer Konstanten $C > 0$. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx$$

eine auf $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ koerzitive Bilinearform ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst für beliebige $\varepsilon > 0$:

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \|\Delta u\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{L^2}^2$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $\Omega := B_R(0) \setminus \bar{B}_\varrho(0) \subset \mathbb{R}^2$ mit $0 < \varrho < R$, und $u \in W^{1,1}(\Omega)$ eine schwache Lösung der Minimalflächengleichung, also

$$\int_{\Omega} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1)$$

mit den Randbedingungen $u = 0$ auf $\partial B_R(0)$, $u = h$ auf $\partial B_\varrho(0)$ (im Sinne der Spur), wobei $h > 0$ eine Konstante ist.

- (a) Zeigen Sie, dass u radialsymmetrisch ist, also dass für alle orthogonalen Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ $u = u_Q$ f.ü. in Ω gilt, wobei $u_Q(x) := u(Qx)$.

Hinweis: $u_Q \in W^{1,1}(\Omega)$ mit $\nabla u_Q(x) = (\nabla u)(Qx)Q$, und u_Q erfüllt die gleichen Randbedingungen wie u . Zeigen Sie zunächst, dass auch u_Q eine Lösung von (1) ist.

- (b) Man kann sich überlegen, dass wegen der Radialsymmetrie von u ein $v \in W^{1,1}((\varrho, R)) \cap C^0([\varrho, R])$ existiert, so dass $u(x) = v(|x|)$ für fast alle $x \in \Omega$ gilt. Zeigen Sie, dass damit (1) äquivalent ist zu

$$\int_0^R \frac{v'(r)}{\sqrt{1 + |v'(r)|^2}} \cdot \eta'(r)r \, dr = 0 \quad \text{für alle } \eta \in C_0^\infty((\varrho, R)). \quad (2)$$

Ohne Begründung: Die entsprechenden Randbedingungen für v sind $v(\varrho) = h$, $v(R) = 0$ (im klassischen Sinne).

- (c) Zeigen Sie: Ist v eine Lösung von (2), so gilt

$$\frac{v'(r)}{\sqrt{1 + |v'(r)|^2}} = \frac{d}{r} \quad \text{für fast alle } \varrho < r < R,$$

mit einer Konstanten $d \in \mathbb{R}$. Ist $d \leq \varrho$, so ist zudem v' stetig auf $(\varrho, R]$ (bzw., fast überall gleich einer stetigen Funktion, die im Folgenden auch als v' bezeichnet wird).

Hinweis: $g : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, $g(s) := s(1 + s^2)^{-\frac{1}{2}}$ ist stetig invertierbar. (Wieso?)

Bemerkung: Da der Hauptsatz der Integralrechnung in $W^{1,1}((\varrho, R))$ gilt, folgt aus der Stetigkeit von v' , dass $v(r) := \int_r^R v'(s) \, dx$ ein stetig differenzierbarer Repräsentant von v ist.

- (d) Berechnen Sie alle Lösungen $v \in C^1((\varrho, R)) \cap C^0([\varrho, R])$ von (2) mit $v(R) = 0$. Wann ist unter den Lösungen eine, die auch die zweite Randbedingung $v(\varrho) = h$ erfüllt?

Hinweis: $\operatorname{arcosh}(t)$ ist eine Stammfunktion zu $(t^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$ für $t > 1$.

(3+2+2+3=10 Punkte)

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

<http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1213WS/varungl.html>