Prof. Dr. B. Kawohl **WS 2012/2013**
Dr. S. Krömer

Variationsungleichungen

11. Übung

Abgabe: Freitag, 11.01.2013, bis 12:15 Uhr
(in den Briefkasten für Übungsblätter im "MI-Container" auf dem Parkplatz der Physik)

Aufgabe 1:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Wir betrachten Newtons Funktional des Strömungswiderstands eines Körpers mit Profil u in dünnen Medien:

$$R(u) := \int_\Omega \frac{1}{1+|\nabla u|^2}\, dx$$

Die zugehörige Euler-Lagrange Gleichung in starker Form für glatte kritische Punkte u lautet

$$0 = 2\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{(1+|\nabla u|^2)^2}\right) = a_{ij}(\nabla u)u_{x_i x_j} \quad \text{in } \Omega. \tag{1}$$

(Diese Gleichung erhält man nur, wenn man das Funktional *nicht* auf konkave oder beschränkte Funktionen einschränkt!) Zeigen Sie:

(a) $a_{ij}(\xi) = \frac{2}{(1+|\xi|^2)^2}\delta_{ij} - \frac{8\xi_i\xi_j}{(1+|\xi|^2)^3}$ für $\xi \in \mathbb{R}^N$, wobei $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

(b) Der *quasilineare Differentialoperator zweiter Ordnung* $u \mapsto a_{ij}(\nabla u)u_{x_i x_j}$ heißt *(lokal) elliptisch bei einem* $\xi \in \mathbb{R}^N$, wenn die Matrix $A(\xi) := (a_{ij}(\xi))_{ij}$ positiv definit oder negativ definit ist. Für welche Werte von ξ ist dies der Fall, und wann ist $A(\xi)$ indefinit?
Hinweis: Für $\xi \neq 0$ sind ξ und alle Vektoren senkrecht zu ξ Eigenvektoren von $A(\xi)$.

Bemerkung: Wäre $A(\xi)$ durchgehend negativ definit oder durchgehend positiv definit, würde man den Differentialoperator als elliptisch bezeichnen. Hier handelt es sich um einen Operator wechselnden Typs. Die Funktion im Integranden von R, $\xi \mapsto g(\xi) := \frac{1}{1+|\xi|^2}$, erfüllt $D^2 g(\xi) = -A(\xi)$, was lokale Konvexität von g mit der Elliptizität des Differentialoperators verknüpft.

(5 Punkte)

Aufgabe 2 (konvexe Relaxation in L^p):
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ messbar mit endlichem Maß, und $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ stetig mit $0 \leq f(\mu) \leq C(1+|\mu|^p)$, wobei $1 \leq p < \infty$ und $C > 0$ Konstanten sind. Wegen dieser Wachstumsbedingung an f ist

$$F(u) := \int_\Omega f(u(x))\, dx, \quad u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$$

stets endlich. Ferner sei f^{**} die konvexe Hülle von f, also die größte konvexe Funktion kleiner oder gleich f. Nach einem Satz von Carathéodory kann man f^{**} an jeder Stelle durch geeignete Konvexkombinationen von Werten von f approximieren: Zu jedem $\mu \in \mathbb{R}^M$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es Zahlen $\theta_i \in [0,1]$ und Vektoren $\xi_i \in \mathbb{R}^M$, $i = 0, \ldots, N$, mit

$$\sum_{i=0}^N \theta_i = 1, \quad \sum_{i=0}^N \theta_i \xi_i = \mu \quad \text{und} \quad f^{**}(\mu) \leq \sum_{i=0}^N \theta_i f(\xi_i) \leq f^{**}(\mu) + \varepsilon.$$

Zeigen Sie damit:

(a) Für alle konstanten Funktionen $u_0 \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$ gilt

$$\inf_{u\in L^p} \int_\Omega f(u(x))\,dx \le \int_\Omega f^{**}(u_0(x))\,dx \le \int_\Omega f(u_0(x))\,dx$$

Hinweis: Nach Voraussetzung ist $u_0 \equiv \mu$ für ein $\mu \in \mathbb{R}^M$. Verwenden Sie stückweise konstante Funktionen u, mit den Werten ξ_i auf Teilmengen von Ω mit geeignetem Maß.

(b) Ist $u_0 \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$ ein Minimierer von F, der auf Ω konstant ist, so gilt $F(u_0) = \int_\Omega f^{**}(u_0(x))\,dx$, und $f(u_0(x)) = f^{**}(u_0(x))$ für fast alle $x \in \Omega$.

Bemerkung: Da man alle Funktionen in L^p durch Treppenfunktionen approximieren kann, folgen die obigen Aussagen sogar für beliebiges, nichtkonstantes $u_0 \in L^p$.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Es sei $B := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $M > 0$ eine Konstante. Nach Ergebnissen der Vorlesung hat

$$R(v) := \int_B \frac{1}{1+|\nabla v|^2}\,dx, \quad v \in K := \{v : B \to \mathbb{R} \mid v \text{ konkav}, 0 \le v \le M\}$$

einen Minimierer u in $K \subset W^{1,\infty}_{\text{loc}}(B)$. Wir wollen zeigen, dass u nicht radialsymmetrisch sein kann. Angenommen, dies ist doch der Fall. Führen Sie die Annahme in folgenden Schritten zum Widerspruch:

(a) Ist $\varphi \in C_0^\infty(B)$ eine Funktion mit $u + t\varphi \in K$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit hinreichend kleinem Betrag, so gilt

$$0 \le \frac{d^2}{dt^2} R(u+t\varphi)\Big|_{t=0} = \int_B \frac{2}{(1+|\nabla u|^2)^3}\left[-(1+|\nabla u|^2)\,|\nabla\varphi|^2 + 4(\nabla u\cdot\nabla\varphi)^2\right]\,dx.$$

(b) Transformieren Sie das Integral in (a) in Polarkoordinaten $x = r(\cos\theta,\sin\theta)$, mit $u = u(r)$ und dem Ansatz $\varphi_k(r,\theta) := \eta(r)\sin(k\theta)$, $r \in (0,1)$, $\theta \in [0,2\pi)$. Zeigen Sie, dass für $\eta \in C_0^\infty((0,1)) \setminus \{0\}$ das Vorzeichen des Integrals negativ wird, zumindest für große $k \in \mathbb{N}$.
Hinweis: $\int_0^{2\pi} \sin^2(k\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2(k\theta)\,d\theta = C_1 > 0$, mit C_1 unabhängig von $k \in \mathbb{N}$.
Bemerkung: Dies liefert noch nicht den gewünschten Widerspruch zu (a), da wir momentan noch nicht wissen, ob überhaupt ein φ_k im Sinne von (a) zulässig ist. Dies zu zeigen ist das Ziel von (c) und (d).

(c) Ist u nicht konstant, so gibt es ein $r_0 \in [0,1)$ mit $u'(r) \le -1$ für fast alle $r > r_0$.

(d) Ist u in einem Intervall $[a,b] \subset [r_0,1]$ zweimal stetig differenzierbar mit $u''(r) < 0$ für alle $r \in [a,b]$, so ist $D^2u(x)$ (Hessematrix bezüglich der Standardkoordinaten) negativ definit auf der kompakten Menge $\{x : |x| \in [a,b]\}$. Daraus folgt, dass ein $\varepsilon = \varepsilon(k,\eta) > 0$ existiert, so dass $D^2(u+t\varphi_k)(x) = D^2u(x) + tD^2\varphi_k(x)$ negativ definit ist für alle $|t| < \varepsilon$. Insbesondere bleibt $u + t\varphi_k$ auf B konkav und damit in K, sofern der Träger von η in $[a,b]$ liegt und t klein genug ist.
Bemerkung: Man kann den Minimierer in der Klasse der radialsymmetrischen Funktionen explizit berechen, was wir uns hier sparen. Es zeigt sich, dass dieser tatsächlich $u'' < 0$ auf $(r_0,1)$ erfüllt, womit die Annahme in (d) gerechtfertigt ist.

(3+3+2+2=10 Punkte)

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1213WS/varungl.html