

Variationsungleichungen

12. Übung

Abgabe: Freitag, 18.01.2013, bis 12:15 Uhr

(in den Briefkasten für Übungsblätter im "MI-Container" auf dem Parkplatz der Physik)

Aufgabe 1:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt, $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $1 \leq p < \infty$, und $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $W^{1,\infty}(\Omega)$, so dass $u_n \rightharpoonup^* 0$ in $W^{1,\infty}$ und $u_n \rightarrow 0$ in $L^\infty(\Omega)$ für $n \rightarrow \infty$. Ferner sei $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ eine Folge von „Abschneidefunktionen“, mit $0 \leq \varphi_k \leq 1$ in Ω für alle k , und $|\{x \in \Omega | \varphi_k(x) < 1\}| \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Unser Ziel ist es, durch Multiplikation mit Abschneidefunktionen u_n in der Nähe des Randes von Ω so auf 0 abzuändern, dass der durch die Modifikation eingeführte Fehler für große n vernachlässigbar bleibt, sowohl im zu f gehörigen Integralfunktional als auch im Hinblick auf den schwach*-Limes der Folge in $W^{1,\infty}$. Zeigen Sie dazu:

(a) Es gilt

$$\int_{\Omega} |f(\varphi_k \nabla u_n) - f(\nabla u_n)| \, dx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

gleichmäßig in $n \in \mathbb{N}$.

(b) Für jedes feste k gilt

$$\|\nabla(\varphi_k u_n) - \varphi_k \nabla u_n\|_{L^\infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

(c) Es existiert eine strikt monoton wachsende Folge $(n(k))_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ (insbes. $n(k) \rightarrow \infty$), so dass $v_k := \varphi_k u_{n(k)}$ in $W^{1,\infty}$ beschränkt ist, und

$$\int_{\Omega} |f(\nabla v_k) - f(\nabla u_{n(k)})| \, dx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

(d) $v_k \rightharpoonup^* 0$ in $W^{1,\infty}$.

(2+2+4+2=10 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet. Eine Folge (u_n) konvergiert genau dann schwach* gegen ein u in $W^{1,\infty}(\Omega)$, wenn

$$\int_{\Omega} u_n v \rightarrow \int_{\Omega} u v \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot w \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot w, \quad \text{für alle } v \in L^1(\Omega) \text{ und alle } w \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

Zudem konvergiert eine Folge (u_n) genau dann schwach gegen ein u in $W^{1,p}(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$), wenn

$$\int_{\Omega} u_n v \rightarrow \int_{\Omega} u v \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot w \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot w, \quad \text{für alle } v \in L^q(\Omega) \text{ und alle } w \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^N),$$

wobei $q \in (1, \infty]$ durch $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ gegeben ist. Zeigen Sie mit diesen Charakterisierungen für jede beschränkte Folge (u_n) in $W^{1,\infty}(\Omega)$ und $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$:

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p} \text{ für ein } p \in [1, \infty) \iff u_n \rightharpoonup^* u \text{ in } W^{1,\infty}$$

Hinweis zu $\Rightarrow$: Für $v \in L^1$ ist $v^{[k]} := \min\{k, \max\{-k, v\}\} \in L^\infty \subset L^q$, und $v^{[k]} - v \rightarrow 0$ in L^1 .
(5 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei $u \in H_0^1((-1, 1))$ gegeben durch $u(x) := \min\{3x + 3, -(x + 1)^2 + 4\}$. Skizzieren Sie u , und zeigen Sie dann:

(a) Für alle $\varphi \in C_0^\infty(-1, 1)$ gilt

$$\int_{(-1,1)} u' \varphi' dx = 5\varphi(0) + 2 \int_0^1 \varphi(x) dx$$

Insbesondere folgt $\int u' \varphi' dx \geq 0$ für alle $\varphi \in H_0^1(-1, 1)$ mit $\varphi \geq 0$, und laut Vorlesung existiert ein nichtnegatives Radon-Maß μ mit $-u'' = \mu$ im Distributionssinne, also

$$\int_{(-1,1)} u' \varphi' dx = \int_{(-1,1)} \varphi(x) d\mu(x) \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty((-1, 1)).$$

(b) Geben Sie μ explizit an. Ist μ absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes λ , gilt also $\lambda(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$ für alle messbaren Mengen A ?

(5 Punkte)

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

<http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1213WS/varungl.html>