Mathematische Grundlegung

Probeklausur zur Vorbereitung

Bearbeitungszeit: 60 Minuten
Bei der Klausur genügen 20 von 40 möglichen Punkten zum Bestehen.

Aufgabe 1:
Wir betrachten folgende rekursiv definierte Folge (a_n) in $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} a_1 &= -1, \\ a_2 &= 1, \\ a_n &= a_{n-2} + 13 \quad \text{für } n \geq 3. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie a_3, a_4 und a_5.

(b) Es gilt $a_1 \equiv 6 \pmod 7$, $a_2 \equiv 1 \pmod 7$. Stellen Sie nun auch a_3, a_4 und a_5 durch jeweils eine der Zahlen $0, 1, \ldots, 6 \pmod 7$ dar.

(3+3=6 Punkte)

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie Eulers $\phi(n)$ für $n = 20$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Machen Sie eine Liste der ganzen Zahlen von 1 bis 19. Markieren Sie dann die durch 2 teilbaren mit einem Kreis, und die durch 5 teilbaren mit einem Quadrat.

(b) Wieviele der gelisteten Zahlen sind teilerfremd zu 20?

(c) Geben Sie nun den Wert von $\phi(20)$ an.

(3+2+1=6 Punkte)

Aufgabe 3:
Wir betrachten für die Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -x(t), \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

(a) Überprüfe Sie, ob $x(t) = e^{-t}$ eine Lösung ist. (Was ist die Ableitung nach t von e^{-t}?)

(b) Geben Sie das Eulerverfahren zur Berechnung einer Näherungslösung $\tilde{x}$ für diese Differentialgleichung an, also die Vorschrift zur Berechnung von $\tilde{x}(t_{i+1})$ aus $\tilde{x}(t_i)$, wobei $t_{i+1} = t_i + h$ mit dem Zeitschritt $h > 0$ ist.
Zur Erinnerung: In der Differentialgleichung ersetzt man bei $t = t_i$ die Ableitung $\dot{x}(t)$ näherungsweise durch den Differenzenquotienten von $\tilde{x}$, von t_i nach $t_{i+1} = t_i + h$.

(c) Berechnen Sie konkret die ersten zwei Zeitschritte, also $\tilde{x}(t_1)$ und $\tilde{x}(t_2)$, ausgehend von der Anfangsbedingung $\tilde{x}(t_0) = 3$, mit $t_0 = 0$, $t_i = ih$ und Zeitschritt $h = \frac{1}{2}$.

(3+4+2=8 Punkte)

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 4:
Angenommen, in einem Modell für eine Größe v, die eine Funktion der Zeit t ist, ist die infinitesimale Änderung dv von v proportional zu v^2 sowie zu dt. Formal:

$$dv \sim v^2 \quad \text{und} \quad dv \sim dt.$$

Geben Sie die Differentialgleichung für $v(t)$ an, die dies zusammenfasst. Proportionalitätskonstanten (soweit nötig) können Sie mit $A, B, \ldots$ bezeichnen.

(3 Punkte)

Aufgabe 5: Bestimmen Sie mit Hilfe des verallgemeinerten euklidischen Algorithmus eine ganze Zahl s, so dass $s \cdot 9 \equiv 1 \pmod{31}$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(31, 9)$ mit dem euklidischen Algorithmus.
Zur Kontrolle: Zweimal Division mit Rest sollte auf $\mathrm{ggT}(31, 9) = \mathrm{ggT}(4, 1) = 1$ führen.

(b) Benutzen Sie die Zwischenergebnisse aus (a), um Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$ zu finden, für die

$$1 = \mathrm{ggT}(9, 31) = s \cdot 9 + t \cdot 31.$$

(4+4=8 Punkte)

Aufgabe 6:
Eine Uhr sei auf die Ortszeit (Sonnenzeit) in Greenwich (ca. 50,5° Nord, 0° Ost) eingestellt, so dass 12:00 auf dieser Uhr genau mit dem Sonnenhöchststand in Greewich zusammenfällt. Was würde diese Uhr bei Sonnenhöchststand in Köln (ca. 51° Nord, 7° Ost) anzeigen?

Hinweis: Es genügt, die berechnete Uhrzeit in Stunden als ungekürzten Bruch anzugeben; Sie müssen diesen insbesondere *nicht in das übliche Format* Std:Min:Sek *umrechnen*. Gehen Sie davon aus, dass die Sonne, von der Erde aus gesehen, genau 24 Stunden für einen "Umlauf" (entspricht 360°) benötigt. Da die Sonne im Osten aufgeht, wird die Uhr mittags in Köln eine Zeit vor 12:00 anzeigen.

(4 Punkte)

Aufgabe 7:
Sind folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F)? Sie dürfen ohne Begründung antworten.

(a) Die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^k$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert.

(b) Ist $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine glatte Funktion, so dass $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ die Position eines Teilchens im Raum zur Zeit t angibt, dann ist die Beschleunigung des Teilchens zur Zeit t immer gegeben durch $\dot{\vec{x}}(t)$, die erste Ableitung von $\vec{x}(t)$ nach t.

(c) Fährt ein Auto über ein ebenes Gelände, mit konstantem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = (30, 40)$ [jeweils km/h], ist es 50 [km/h] schnell (im dem Sinne, dass sein Geschwindigkeitsbetrag, die Länge des Geschwindigkeitsvektors, 50 ist).

(d) Fakten: Der 1.7.2013 war ein Montag; ein Tag nach dem 1.7.2013 war ein Dienstag.
Aussage: 69999 Tage nach dem 1.7.2013 ist ebenfalls ein Dienstag (sofern der Wochenrhythmus nie unterbrochen wird).

(e) Fakten: $77 = 7 \cdot 11$ ist Produkt zweier Primzahlen, und $(7 - 1) \cdot (11 - 1) = 60$.
Aussage: $5^{60} \equiv 1 \pmod{77}$.

(1+1+1+1+1=5 Punkte)