PD Dr. S. Krömer **3.7.2013**

Mathematische Grundlegung

Lösung zur Probeklausur

Aufgabe 1:

(a) $a_3 = a_1 + 13 = 12,$
$a_4 = a_2 + 13 = 14,$
$a_5 = a_3 + 13 = 25.$

(b) $a_3 = 12 = 7 + 5 \equiv 5 \pmod 7,$
$a_3 = 14 = 2 \cdot 7 \equiv 0 \pmod 7,$
$a_5 = 25 = 3 \cdot 7 + 4 \equiv 4 \pmod 7.$

Aufgabe 2:

(a)

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \boxed{5} & 6 & 7 & 8 & 9 & \boxed{10} \\ 11 & 12 & 13 & 14 & \boxed{15} & 16 & 17 & 18 & 19 & \end{array}$$

(b) Da $20 = 2^2 \cdot 5$ (Primzahlzerlegung), ist eine Zahl genau dann teilerfremd zu 20, wenn sie weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist. Von denen der Liste aus (a) sind das alle unmarkierten, insgesamt 8 Stück.

(c) $\phi(20) = 8.$

Aufgabe 3:

(a) Für $x(t) = e^{-t}$: $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}e^{-t} = -e^{-t} = -x(t)$. Damit ist x eine Lösung.

(b) Ersetze für die Näherungslösung in der Differentialgleichung die Ableitung durch den Differenzenquotienten:

$$\frac{\tilde{x}(t_{i+1}) - \tilde{x}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = -\tilde{x}(t_i)$$

Mit $t_{i+1} - t_i = h$ und aufgelöst nach $\tilde{x}(t_{i+1})$ ergibt das die Vorschrift

$$\tilde{x}(t_{i+1} = (-h + 1)\tilde{x}(t_i).$$

(c) Mit $\tilde{x}(t_0) = 3$, $t_0 = 0$, $t_i = ih$ und Zeitschritt $h = \frac{1}{2}$:

$$\tilde{x}(t_1) = \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\tilde{x}(t_0) = \frac{3}{2}, \quad \tilde{x}(t_2) = \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\tilde{x}(t_1) = \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 4:
Nach Voraussetzung ist (formal)

$$dv = Av^2 \quad \text{und} \quad dv = Bdt,$$

wobei A von t bzw. dt und B von v abhängen darf. Zusammen geht das nur, wenn

$$dv = Cv^2\, dt,$$

mit einer von allem anderen unabhängigen Konstante C. Die Differentialgleichung lautet dementsprechend

$$\frac{dv(t)}{dt} = Cv(t)^2$$

Aufgabe 5:

(a) Euklidischer Algorithmus zur Berechnung von $\text{ggT}(31,9)$:

$$31 : 9 = 3 \quad \text{Rest}\, 4, \quad \text{also } 31 = 3 \cdot 9 + 4, \tag{1}$$

$$9 : 4 = 2 \quad \text{Rest}\, 1, \quad \text{also } 9 = 2 \cdot 4 + 1; \tag{2}$$

damit folgt $\text{ggT}(31,9) = \text{ggT}(4,1) = 1$.

(b)

$$\begin{aligned} 1 &= 9 - 2 \cdot 4 && \text{nach (2)} \\ &= 9 - 2 \cdot (31 - 3 \cdot 9) && \text{nach (1)} \\ &= 7 \cdot 9 - 2 \cdot 31 && \text{(zusammengefasst)} \end{aligned}$$

Also $s = 7$ und $t = -2$.

(4+4=8 Punkte)

Aufgabe 6: Vom Sonnenzenit in Köln zum Zenit in Greenwich muss die Erde sich um 7° weiterdrehen, also $\frac{7}{360}$ einer ganzen Drehung. Das dauert

$$\Delta t = \frac{7}{360} \cdot 24 \quad \text{Stunden}$$

Die Uhr zeigt mittags in Köln also folgendes an:

$$12 - \Delta t = 12 - \frac{7}{180} \cdot 12 \quad \left[= 12 \left(\frac{180}{180} - \frac{7}{180} \right) = \frac{12 \cdot 173}{180} = \frac{173}{15}, \quad \text{das entspricht } 11:32 \text{ Uhr} \right]$$

Aufgabe 7:
Sind folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F)? Sie dürfen ohne Begründung antworten.

(a) F [denn der Parameter der geometrischen Reihe ist hier $\frac{3}{2} \geq 1$, weshalb die Reihe gegen Unendlich geht]

(b) F [Beschleuningung ist die *zweite* Ableitung]

(c) W [Geswchwindigkeitsbetrag ist $\sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50$].

(d) F [$69999 = 70000 - 1 \equiv -1 \pmod 7$, weshalb der gesuchte Wochentag eins vor Montag, also ein Sonntag ist]

(e) W [Das gilt nach dem Satz von Euler, da $\phi(pq) = (p-1)(q-1)$ für zwei Primzahlen $p \neq q$. Mit der Folgerung zum Satz würde man noch nicht einmal benötigen, dass $\text{ggT}(5,77) = 1$ ist, was aber auch stimmt.]

(1+1+1+1+1=5 Punkte)