Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer
Dipl. Math. F. Krügel

WS 2011/2012

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Klausur

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Gesamtpunktzahl: 50 Punkte

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = xy(x)^3, \quad x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 2:
Wir betrachten die Gleichung

$$y''''(t) - 2y'''(t) - y''(t) + 2y'(t) + 10y(t) = e^t. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass $y_1(t) = e^{(i+2)t}$ und $y_2(t) = e^{(i-1)t}$ komplexe Lösungen des homogenen Problems sind.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des homogenen Problems.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des inhomogenen Problems (2).

(2 + 4 + 4 = 10 Punkte)

Aufgabe 3:
Für seine Planung der Karnevalstage braucht Herr Alk eine Formel für die zeitliche Entwicklung des Alkoholgehalts nach einer Karnevalsparty. Dabei sind der Alkoholgehalt im Blut $b(t)$ und der im Gewebe $g(t)$ von Bedeutung.

Während des Abbauprozesses wird Alkohol aus der Blutbahn über Ausscheidungsorgane abgebaut; weiterhin findet aber auch ein ständiger Übertritt von Alkohol aus der Blutbahn ins Gewebe und umgekehrt von Gewebe in die Blutbahn statt. Es wird angenommen, dass die Übertrittsraten und die Abbaurate proportional zum bestehenden Alkoholgehalt im abgebenden Kompartiment sind.

Stellen Sie das System von Differentialgleichungen für den Abbau des Alkohols auf. Lösen Sie dieses unter der Annahme, dass sich zu Beginn des Abbaus der Alkoholgehalt im Blut 2 Promille und im Gewebe 1 Promille beträgt und für Herrn Alk folgende Raten gelten:

(a) Blut $\longrightarrow$ Ausscheidung: $\alpha = 8$,

(b) Blut $\longrightarrow$ Gewebe: $\beta = 1$,

(c) Gewebe $\longrightarrow$ Blut: $\gamma = 9$.

(10 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, und $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$u'' = f(u). \tag{3}$$

Angenommen, es existieren zwei Punkte $x_1 < x_2$ mit $u'(x_1) = u'(x_2) = 0$. Zeigen Sie, dass dann u periodisch mit Periode $P := 2(x_2 - x_1)$ ist, also dass

$$u(x) = u(x + P) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Hilfsfunktionen $v_1(y) := u(x_1 + y)$, $w_1(y) := u(x_1 - y)$, und zeigen Sie zunächst, dass $v_1 \equiv w_1$ gilt.

(10 Punkte)

Aufgabe 5:
Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = h(x), & x \in [0, 2\pi], \\ y(0) = 0, \\ y'(2\pi) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

für gegebene stetige Funktionen $h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes solche h das Randwertproblem (4) eindeutig lösbar ist.

(b) Geben Sie die Definitionen für die Begriffe der Grundlösung und der Greenschen Funktion an (für (4)).

(c) Geben Sie eine Formel an, wie die Lösung u aus h und der Greenschen Funktion gewonnen werden kann.

(d) Bestimmen Sie die Greensche Funktion für (4).

(3 + 3 + 1 + 3 = 10 Punkte)