Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Krömer
Dipl. Math. F. Krügel **WS 2011/2012**

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Nachklausur

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Gesamtpunktzahl: 50 Punkte

Aufgabe 1:
Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2, \\ y_2' &= a y_1 + y_2, \end{aligned}$$

abhängig von dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ ein reelles Fundamentalsystem.

(b) Skizzieren Sie das Phasenportrait für $a = -1$. Um welchen Typ (stabiler/instabiler Knoten, stabiler/instabiler Strudel, Sattel, Zentrum) handelt es sich?

(5+5=10 Punkte)

Aufgabe 2:
Nachdem der Karneval nun vorbei ist, möchte Herr Alk das Wochenende nutzen, um einen Ausflug mit seinem Hund zu unternehmen, den er in seinem Anhänger transportiert. Der Anhänger ist mit einer Feder mit dem Auto verbunden. Sei $x(t) \in \mathbb{R}$ die Position des Anhängers zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ und $f(t) \in \mathbb{R}$ die des Autos, so dass $f(t) - x(t)$ die Auslenkung der Feder ist. Wir nehmen das Hookesche Gesetz an, nach dem die Federkraft, die auf den Anhänger wirkt, proportional zur Auslenkung ist, mit einer Proportionalitätskonstante $c > \frac{1}{4}$. Außerdem wirkt auf den Anhänger die Reibungskraft, die proportional zur Geschwindigkeit ist, wobei die Proportionalitätskonstante -1 sei (sie ist negativ, da die Reibungskraft bremsend wirkt). Nach dem Newtonschen Gesetz ist Gesamtkraft proportional zur Beschleunigung des Anhängers, wobei wir die Konstante (die Masse des Anhängers) als 1 annehmen.
Da die Festlichkeiten Herrn Alk noch in den Knochen stecken, ist der Fahrstil nicht ganz gleichmäßig, so dass $f(t) = t + \sin(t)$ gilt.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Position des Anhängers auf. Es handelt sich um eine inhomogene lineare Gleichung.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

(3+4+3=10 Punkte)

Aufgabe 3:
Wir betrachten

$$y_0(x) := -\frac{1}{2x}, \quad x > 0$$

Zeigen Sie, dass y_0 Lösung der Gleichung

$$y'(x) = -xy(x)^2 + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x}, \quad x > 0 \tag{1}$$

ist. Bestimmen Sie alle Lösungen von (1) (Die Lösungen sind nicht immer auf ganz $(0, \infty)$ definiert. Die Definitionsintervalle müssen Sie nicht bestimmen).

(10 Punkte)

Aufgabe 4:

(a) Formulieren Sie eine für (b) geeignete Version des Satzes von Picard-Lindelöf für skalare Anfangswertprobleme 1. Ordnung.

(b) Zeigen Sie damit, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + x^{\frac{1}{3}} + \cos(x^2 + y(x)) & \text{für } x \in [0,1], \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

eine eindeutige Lösung $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ hat.

(6+4=10 Punkte)

Aufgabe 5:
Es sei

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \alpha e^{-x},$$

mit einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die f eine Kontraktion ist.

(b) Zeigen Sie, dass f für alle $\alpha < 0$ keinen Fixpunkt hat.

(c) Insbesondere ist f eine Kontraktion im Fall $\alpha = -\frac{1}{2} < 0$. Wieso widerspricht (b) nicht dem Banachschen Fixpunktsatz?

(5+3+2=10 Punkte)