Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
Dr. F. Krügel

WS 2013/2014

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Neujahrsquiz

In den Übungsgruppen, die vom 08.01.2014 bis zum 10.01.2014 stattfinden, wird kein Übungsblatt besprochen. Stattdessen sind Wiederholungen vorgesehen.

Aufgabe: Überlegen Sie sich Fragen zum bisherigen Vorlesungsstoff.

Wenn Sie möchten, können Sie zudem Ihr Wissen anhand des unten angegebenen Quiz überprüfen. Aber Vorsicht: Wie überall im Leben ist nicht alles so, wie es auf den ersten Blick scheint.

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ hat das Anfangswertproblem $y' = -3\sin y + 2y + 2014$, mit $y(0) = y_0$ genau eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$.

(b) Sei y partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = F(y(t)) + G(t)$ und Z die Menge der Lösungen der „homogenen" Gleichung $z'(t) = F(z(t))$. Für jede Lipschitz-stetige rechte Seite F ist dann $\{z + y \mid z \in Z\}$ die Menge aller Lösungen von $y'(t) = F(y(t)) + G(t)$.

(c) Wir betrachten die Gleichung $F(t, y(t), y'(t)) = 0$ mit stetig differenzierbarer Funktion F. Ist (t, a, p) gegeben mit $F(t, a, p) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial p}F(t, a, p) \neq 0$, dann ist (t, a, p) reguläres Linienelement.

(d) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Dann hat die Gleichung $y'(t) = F(y(t))$ höchstens eine Lösung.

(e) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig, $I \subset (a, b)$ ein Intervall und $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $y'(t) = F(y(t))$, die sich für kein $\tilde{b} > b$ zu einer Lösung auf $(a, \tilde{b})$ fortsetzen lässt. Dann ist die Lösung y auf (a, b) unbeschränkt.

(f) Es sei B ein Banachraum. Die Abbildung $T : B \to B$ habe die Eigenschaft, dass es zu jedem $(x, y) \in B \times B$ mit $x \neq y$ ein $q < 1$ gibt, so dass $\|T(x) - T(y)\| \leq q\|x - y\|$. Dann hat T einen eindeutigen Fixpunkt.

(g) Die Gleichung $y''(t) = F(y'(t), y(t))$ kann keine Lösung haben, wenn man als Anfangsbedingung $y(0)$, $y'(0)$ und $y''(0)$ vorgibt.

(h) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und es gelte $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}g(x, y)$. Dann hat $f(x, y)dx + g(x, y)dy$ eine Stammfunktion.

(i) Sei $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ Lösung von $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$, und $g(x,y)dx - f(x,y)dy$ habe eine Stammfunktion F. Dann ist $F(x(t), y(t))$ konstant.

(j) Es gibt eine autonome Differentialgleichung erster Ordnung, so dass die Funktion $x(t) = e^{(e^t)}$ eine Lösung ist.

(k) Für jede differenzierbare matrixwertige Funktion $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\operatorname{Spur} A(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{d}{dt} \det A(t) = 0$.

(l) Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(s) > g(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$, und $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösungen von $u' = f(u)$, $v' = g(v)$ auf ganz $\mathbb{R}$, mit Anfangswerten $u(0) = v(0)$, so folgt $u(t) \geq v(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(m) Für jedes autonome System $\frac{d}{dt}\vec{y} = \vec{F}(\vec{y})$ von n Differentialgleichungen erster Ordnung mit stetiger rechter Seite $\vec{F}$ ist die Menge der stationären Punkte in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen.

Wir wünschen Ihnen allen frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!