Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
Dipl. Math. F. Krügel

WS 2013/2014

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Übung

Abgabe: Montag, 21.10.2013, bis 11.45 Uhr
(oben rechts in den Kasten für Übungsblätter im MI-Container, Wilhelm-Waldeyer-Str.)

Aufgabe 1:
Schneebälle, Mottenkugeln und Bonbons haben wenigstens eines gemeinsam: ihre Volumina V vermindern sich beim Abschmelzen bzw. Lutschen mit einer zeitlichen Rate, die proportional zu der jeweils noch vorhandenen Oberfläche F ist:

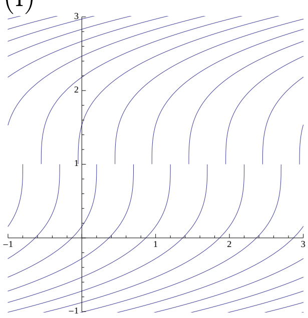
$$\frac{dV}{dt} = -\lambda F \qquad (\lambda > 0 \text{ konstant}).$$

Sei etwa r_0 der Radius einer gerade ausgelegten Mottenkugel, $r(t)$ ihr Radius nach Ablauf der Zeit t. Wie groß ist $r(t)$?
Angenommen, die Mottenkugel habe in 60 Tagen ihr halbes Gewicht verloren. Nach wieviel Tagen ist ihr Radius auf ein Zehntel seiner Anfangsgröße geschrumpft?

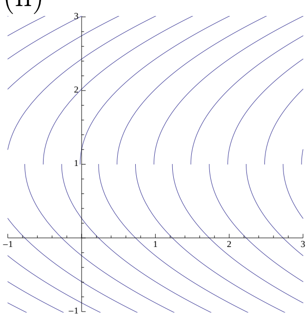
(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Betrachten Sie folgende Graphen in der (x, y)-Ebene, die ausgewählte Lösungen $y(x)$ jeweils einer der Differentialgleichungen (a)–(d) zeigen.

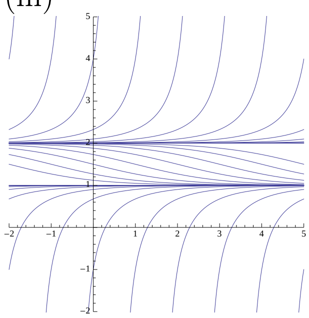
(i)



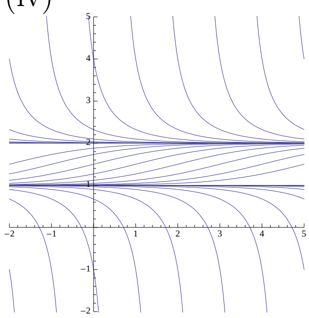
(ii)



(iii)



(iv)



Ordnen Sie die Graphen den folgenden Differentialgleichungen zu.

(a) $y' = y^2 - 3y + 2$ (c) $y' = \dfrac{1}{y-1}$

(b) $y' = -y^2 + 3y - 2$ (d) $y' = \dfrac{1}{(y-1)^2}$

Begründen Sie Ihre Antwort.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Ein Schiff fährt mit konstanter Geschwindigkeit $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ auf dem Meer. Zum Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$ geht der Antrieb des Schiffes kaputt, so dass das Schiff ab diesem Zeitpunkt durch den Wasserwiderstand, der proportional zur Geschwindigkeit des Schiffes ist, gebremst wird. Nach $t_1 = 5\,\mathrm{s}$ beträgt die Geschwindigkeit noch $8\,\mathrm{m/s}$. Leiten Sie eine Differentialgleichung für die Geschwindigkeit her und bestimmen Sie, wann das Schiff auf eine Geschwindigkeit von $1\,\mathrm{m/s}$ abgebremst hat.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Um 1920 stellte R. Pearl experimentell fest, dass die Wachstumsrate dP/dt einer Population von Fruchtfliegen (Drosophila) mit der Populationsgröße $P(t)$ die Gleichung

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{5}P - \frac{1}{5175}P^2 \quad (t \text{ in Tagen gemessen})$$

erfüllt.
Anfänglich seien 10 Fruchtfliegen vorhanden. Zeigen Sie, dass die Population $P(t)$, wenn diese eine C^1-Funktion ist, die die obige Gleichung löst, monoton wächst, aber niemals mehr als 1035 Mitglieder hat. Bei welcher Populationsgröße beginnt die Wachstumsrate abzunehmen?

(5 Punkte)

Organisatorisches

- **Anmeldung zum Übungsbetrieb**: Für die Übungen müssen Sie sich anmelden, online im Portal für Teilnehmer auf der Veranstaltunghomepage (s.u.), bis spätestens Donnerstag, den 17.10.2013. Das Portal dient auch zur Bekanntgabe der Einteilung in Übungsgruppen, und später auch zur Veröffentlichung vorläufiger Klausurergebnisse.
- **Zulassung zur Klausur**: Die erfolgreiche Teilnahme an den Übungen ist Voraussetzung für die Zulassung zur Klausur; Sie müssen dazu mindestens die Hälfte der maximal möglichen Punkte der Übungsaufgaben erreichen, und bereit sein, Ihre eigene Lösung vorzutragen. Voraussichtlich wird es 12 oder 13 Übungsblätter geben. Übungsblätter können alleine abgegeben werden, oder als Gruppenarbeit von höchstens zwei Personen aus der selben Übungsgruppe.

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1314WS/ODE.html