Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
Dipl. Math. F. Krügel

WS 2013/2014

Gewöhnliche Differentialgleichungen

2. Übung

Abgabe: Montag, 28.10.2013, bis 14:00 Uhr
(oben rechts in den Kasten für Übungsblätter im MI-Container, Wilhelm-Waldeyer-Str.)

Aufgabe 1:
Eine Methode, den Todeszeitpunkt einer aufgefundenen Leiche zu schätzen, ist die Temperaturmessung. Grundlage hierfür ist die *Newtonsche Abkühlungsregel*:

> Die Geschwindigkeit der Abkühlung ist proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Körper und Umgebung.

Da die Körpertemperatur eines lebenden Menschen im Normalfall 37°C beträgt, kann bei bekannter Umgebungstemperatur aus der gemessenen Temperatur der Leiche auf den Todeszeitpunkt geschlossen werden. Um die Genauigkeit zu erhöhen, können zwei Messungen durchgeführt werden, so dass auch der Proportionalitätsfaktor selbst bestimmt werden kann.
In einem konkreten Fall wird ein Mordopfer abends in einem geschlossenen Raum gefunden. Die Raumtemperatur beträgt 20°C, und es wird davon ausgegangen, dass diese während der Abkühlung der Leiche konstant war. Um 18:41 wird bei der Leiche eine Temperatur von 34,80°C gemessen. In einer zweiten Messung um 18:58 beträgt die Temperatur noch 34,41°C. Wann war der Todeszeitpunkt?

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit endlich vielen Nullstellen. Für jede Nullstelle η von g und jedes $\varepsilon > 0$ gelte

$$\left| \int_{\eta-\varepsilon}^{\eta} \frac{1}{g(s)} ds \right| = \infty \quad \text{und} \quad \left| \int_{\eta}^{\eta+\varepsilon} \frac{1}{g(s)} ds \right| = \infty$$

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $y \in C^1(I)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = g(y(x))$$

Zeigen Sie: y ist monoton.
Hinweis: Verwenden Sie das Eindeutigkeitskriterium aus der Vorlesung.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$u'(x) + 4xu(x) - 8x = 0$$

(b) Seien $\alpha, \beta > 0$ und $u_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u' = \alpha u \cdot (\beta - u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Die Funktion $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ (hier $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$) soll die Eigenschaft haben, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^+$ die Steigung der Tangente des Graphen von y an der Stelle x gleich dem $\frac{1}{2}$-fachen der Steigung der Gerade durch $(0, 0)$ und $(x, y(x))$ ist.
Finden Sie eine Differentialgleichung, die diese Eigenschaft beschreibt. Finden Sie alle Lösungen dieser Gleichung.

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1314WS/ODE.html