

Gewöhnliche Differentialgleichungen

3. Übung

Abgabe: Montag, 04.11.2013, bis 14:00 Uhr

(oben rechts in den Kasten für Übungsblätter im MI-Container, Wilhelm-Waldeyer-Str.)

Aufgabe 1:

Ein Kapital werde auf einem verzinnten Sparbuch angelegt. Für die Berechnung der Zinsen gibt es verschiedene Möglichkeiten.

- (a) Bei kontinuierlicher Verzinsung ist die Zuwachsrate des Kapitals proportional zu der Größe des Kapitals. Der Proportionalitätsfaktor p heißt (kontinuierlicher) Zinssatz. Formulieren und lösen Sie die Anfangswertaufgabe für das Kapital K als Funktion der Zeit t (gemessen in Jahren), wenn das Anfangskapital A ist.
- (b) Bei jährlicher Verzinsung mit dem Zinssatz z erhöht sich am Ende des Jahres das Kapital um z mal seine Größe zu Beginn des Jahres. Wie groß ist das Kapital nach t Jahren?
- (c) Bei monatlicher Verzinsung erhöhe sich am Ende jedes Monats das Kapital um $\frac{z}{12}$ mal seine Größe zu Beginn des Monats. Wie groß ist das Kapital nach t Jahren?
- (d) Wie groß ist das Kapital nach t Jahren, falls n mal im Jahr mit einem Zinssatz von $\frac{z}{n}$ verzinst wird? Was kann man für $n \rightarrow \infty$ beobachten?

(5 Punkte)

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{dw}{du} = -\frac{3u + 4w + 1}{4u + 2w + 3}.$$

wobei diese natürlich auf dem Gebiet mit $4u + 2w + 3 \neq 0$ betrachtet wird. Auf welchen Intervallen sind die Lösungen definiert?

Hinweis: Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung, um die Gleichung in die Form

$$\frac{dz}{d\bar{u}} = \frac{1}{\bar{u}} \left(-\frac{3 + 4z}{4 + 2z} - z \right)$$

zu bringen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen (\bar{u}, z) und (u, w) ? Beachten Sie auch den Sonderfall $\bar{u} = 0$, für den die zweite Gleichung keinen Sinn macht.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x} - xy(x)^5$$

für $x \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Bedenken Sie dabei, dass es sowohl positive als auch negative Lösungen gibt.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:

Wir betrachten die folgende Riccatische Differentialgleichung:

$$xy' = y(2 - y) + 3x(3x - 1)$$

für $x \in \mathbb{R}^+$.

- (a) Zeigen Sie, dass $y(x) = 3x$ eine Lösung ist.
- (b) Bestimmen Sie die anderen Lösungen.

(5 Punkte)

Am Donnerstag, den 31.10.2013, findet um 14:00 eine Globalübung im großen Hörsaal der Botanik statt als Ersatz für die am Freitag (01.11.2013) aufgrund des Feiertags ausfallenden Übungen. Die am Mittwochs- und Donnerstags-Gruppen finden am 30.10.2013 und 31.10.2013 normal statt.

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

<http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1314WS/ODE.html>