Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
Dipl. Math. F. Krügel

WS 2013/2014

Gewöhnliche Differentialgleichungen

4. Übung

Abgabe: Montag, 11.11.2013, bis 14:00 Uhr
(oben rechts in den Kasten für Übungsblätter im MI-Container, Wilhelm-Waldeyer-Str.)

Aufgabe 1:
Der Auslenkungswinkel φ des mathematischen Pendels erfüllt

$$\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi, \tag{1}$$

mit der konstanten Erdbeschleunigung g.

(a) Zeigen Sie, dass φ die Gleichung (1) genau dann löst, wenn $(x, v) := (\varphi, \dot{\varphi})$ das System

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -g \sin x \\ \dot{x} &= v \end{aligned} \tag{2}$$

löst, und dass für jede Lösung (x, v) von (2) gilt:

$$v\dot{v} + g(\sin x)\dot{x} = 0. \tag{3}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$v dv + g(\sin x) dx = 0$$

exakt ist. Geben Sie eine Stammfunktion an.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Differentialgleichung

$$\left(u^2 e^{(x+a)u^2} + 2ax^2u^4\right) dx + \left(a(x+2)ue^{(x+a)u^2} + \frac{8}{3}ax^3u^3\right) du = 0$$

exakt ist, und berechnen Sie die Lösungen (implizite Form).

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Wir betrachten die implizite Differentialgleichung

$$g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0 \tag{4}$$

im Gebiet $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, wobei

$$g(x,y) := -\frac{y}{x^2+y^2}; \qquad h(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2}$$

(a) Zeigen Sie, dass
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$$
gilt.

(b) Sei $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$. Berechnen Sie
$$\int_0^{2\pi} (g(\gamma(t)), h(\gamma(t))) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$
wobei "$\cdot$" das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ ist.

(c) Zeigen Sie nun, dass (4) nicht exakt ist. Nehmen Sie dazu an, es gäbe eine Stammfunktion F. Berechnen Sie
$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \right) dt$$
mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, und zeigen Sie, dass das dem Ergebnis von (b) widerspricht.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Prüfen Sie die Differentialgleichung

$$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$$

auf Exaktheit und bestimmen Sie gegebenenfalls einen integrierenden Faktor. Finden Sie die Lösungen der Gleichungen in impliziter Form. Achten Sie dabei auch auf mögliche Definitionslücken des integrierenden Faktors.

(5 Punkte)

Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1314WS/ODE.html