Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
Dipl. Math. F. Krügel

WS 2013/2014

Gewöhnliche Differentialgleichungen

5. Übung

Abgabe: Montag, 18.11.2013, bis 14:00 Uhr
(oben rechts in den Kasten für Übungsblätter im MI-Container, Wilhelm-Waldeyer-Str.)

Aufgabe 1:
Angenommen, eine Insektenpopulation u wird durch eine natürliche Räuberpopulation v gemäß dem Lotka-Volterra-Modell kontrolliert. Demnach treten kleine periodische Veränderungen der Population in der Umgebung des kritischen Punktes $(c/d, a/b)$ auf (in der Notation der Vorlesung). Es wird ein Insektizid eingesetzt mit dem Ziel, die Insektenpopulation zu reduzieren; das Insektizid ist jedoch auch für die Räuberspezies giftig. Wir gehen davon aus, dass das Insektizid die Beute bzw. die Räuber mit Proportionalitätsraten α bzw. β zu der jeweils gegenwärtigen Population tötet.

(a) Stellen Sie die modifizierte Differentialgleichung auf. Bestimmen Sie den neuen Gleichgewichtspunkt, und vergleichen Sie ihn mit dem ursprünglichen Gleichgewichtspunkt.

(b) Es sei nun $\alpha = a$. Angenommen, $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ sei Lösung des modifizierten Systems in diesem Fall, mit

$$(x(t), y(t)) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} (x_\infty, 0),$$

für ein $x_\infty > 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{(c+\beta)\log x(0) - d \cdot x(0)}{b} - y(0) = \frac{(c+\beta)\log x_\infty - d \cdot x_\infty}{b}$$

gilt.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Wir betrachten das autonome System

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) + 3y_2(x) + 1 \\ y_2'(x) &= -2y_2(x) + 1 \quad . \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte.

(b) Zeichnen Sie das Richtungsfeld in deren Nähe genügend fein, dass man den Verlauf der Lösungskurven dort erkennen kann. (Siehe Hinweis umseitig.)

(5 Punkte)

Hinweis zum Zeichnen eines Richtungfelds bei Aufgabe 2(b): In der Nähe der stationären Punkte muss an vielen Punkten in der (y_1, y_2)-Ebene der (mit dem System aus y_1, y_2 berechenbare) Vektor (y_1', y_2') eingetragen werden, als Pfeil mit Fußpunkt (y_1, y_2). Für den Verlauf der Lösungskurven spielt die Länge der Richtungsvektoren keine Rolle, sondern nur ihre Richtung; Sie können diese der Übersichtlichkeit halber daher alle sehr kurz zeichnen. Wenn Sie möchten, können Sie das Bild des Richtungsfeldes statt per Hand auch mit dem Computer erzeugen (z.B. mit Mathematica, Maple oder Matlab); geben Sie dann zum Bild aber auch Ihren Quellcode mit ab.

Aufgabe 3:
Wir betrachten die implizite Differentialgleichung

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad \text{wobei } F(x, y, p) := p^4 - 9y.$$

Die zugehörige Menge der Linienelemente ist

$$L := \{(x, y, p) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, p) = 0 \}.$$

(a) Zeigen Sie, dass alle Linienelemente in $L \cap R$ regulär sind, für

$$R := \{(x, y, p) \in \mathbb{R}^3 \mid p \neq 0 \}.$$

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen die in R verlaufen, d.h. alle Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$ mit $(x, y(x), y'(x)) \in R$ für alle $x \in I$, mit einem geeigneten Intervall I. Geben Sie jeweils auch das größtmögliche zugehörige Intervall mit dieser Eigenschaft an.

(c) Zeigen Sie, dass alle Linienelemente in $L \setminus R$ singulär sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei B ein Banachraum. Der Operator $T : B \to B$ sei surjektiv und expandierend, d.h. es existiert ein $q > 1$, so dass $\|T(x) - T(y)\| \geq q\|x - y\|$ für alle $x, y \in B$.
Beweisen Sie, dass T einen eindeutigen Fixpunkt $\bar{x} \in B$ hat.
Hinweis: Ist der Operator T bijektiv?

(5 Punkte)

Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1314WS/ODE.html